

**Bestimmung der Polarisation
hochenergetischer
gestreuter Elektronen**

Wolfgang Bauer



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**Bestimmung der Polarisation
hochenergetischer gestreuter Elektronen**

Dissertation
der
Fakultät für Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Wolfgang Bauer
aus Illertissen

München, den 31. Oktober 1986

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Salecker

2. Gutachter: Prof. Dr. E. Weidemann

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Januar 1987

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Messung der Polarisierung von (hochenergetischen) Elektronen ist es notwendig, diese Teilchen einem gesonderten, polarisationsabhängigen Streuprozess (= sekundärer Streuprozess) zu unterwerfen. Es werden hierfür die folgenden Reaktionen betrachtet: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, ferner elastische und inelastische Elektron-Proton-Streuung sowie Compton-Streuung an Photonen im Bereich des sichtbaren Lichtes.

Soll die Polarisierung s von hochenergetischen Elektronen im Endzustand einer Hochenergiereaktion mit genügender Genauigkeit Δs gemessen werden, so ist es wichtig, mit einer möglichst kleinen Ereignisrate auszukommen. Als Maß wird eine Größe $N_0(\Delta s)$ eingeführt. Sie gibt an, wieviele Elektronen mindestens auf ein gegebenes Target treffen müssen, damit man den Polarisationsgrad s mit einer bestimmten Genauigkeit Δs messen kann. Die Zahl N_0 hängt ab von der Beschaffenheit des Targets (Dichte, Abmessungen, Polarisationsgrad), von der Natur des Analyseprozesses (Phasenraum der registrierten Streuteilchen, Wirkungsquerschnitt, Polarisationsasymmetrie) und wächst quadratisch mit der angestrebten Meßgenauigkeit. Je kleiner N_0 ausfällt, um so geeigneter ist die zur Polarisationsanalyse verwendete Reaktion.

Die vorliegende Arbeit stellt heraus, daß Compton-Streuung an den Photonen eines Hochleistungslasers die effektivste Analyseanordnung ist. Beispielsweise sind zur Messung der longitudinalen Polarisierung von Elektronen der Energie 50 GeV $N_0 \approx (100 \dots 200)/(\Delta s_{||})^2$ Elektronen erforderlich. Das sind ca. 10^5 mal weniger Teilchen als man bei den anderen betrachteten Reaktionen benötigt. Für Compton-Streuung ist N_0 nur schwach energieabhängig, weil sich die Wellenlänge des Lasers an die Energie der Elektronen anpassen läßt. Dagegen wächst für die übrigen Prozesse N_0 mit der Energie an.

Der hier genannte Zahlenwert für N_0 bei Verwendung von Compton-Streuung gilt unter der Voraussetzung, daß ein Hochleistungslaser (Nd-Glas, Wellenlänge $\lambda = 1064$ nm, Photonenenergie $E = 1.17$ eV) mit einer

Leistung von 1 TW zur Verfügung steht. Dieser soll bei einer Pulsdauer von 0.1 ns ein 3 cm langes, zylinderförmiges, vollständig zirkular polarisiertes und auf einen Durchmesser von 30 μm fokussiertes Photonenbündel (Energieinhalt 100 J) emittieren. (Ein einziges Bündel dieser Art kann für einen großen Bruchteil der bei einer primären Reaktion entstehenden Elektronen als Target dienen, wenn es in einem Abstand von einigen 10 μm an der Wechselwirkungszone vorbeifliegt.) Weiter wurde angenommen, daß die Elektronen das Photonentarget auf einer Länge von 50 – 250 μm durchlaufen. Dabei entstehen Compton-rückgestreute harte γ -Quanten, deren Energiespektrum im Bereich der maximalen Photonenenergie $E_{\gamma, \text{max}}$ stark von der longitudinalen Polarisation der einfallenden Elektronen abhängt. Aus der Zählratenasymmetrie der registrierten Photonen im Energieintervall $(0.8 \dots 1.) \times E_{\gamma, \text{max}}$ beim Übergang von rechts- zu linkszirkular polarisierten Laserphotonen läßt sich der Polarisationsgrad der Elektronen ermitteln.

Neben der Diskussion dieser speziellen Anordnung wird eine Berechnung der Effektivität einer Polarisationsmessung mit Hilfe von Compton-Streuung durchgeführt, in die nur die Weglänge der Elektronen innerhalb des Photonentargets eingeht. Dabei wird Mehrfachstreuung der Elektronen berücksichtigt. Es zeigt sich, daß der minimale Wert für N_0 bei $N_0 \approx 80/(\Delta s_{\parallel})^2$ liegt.

Es wird gezeigt, daß heutige Detektoren in der Lage sind, die Zählratenasymmetrie im Energiespektrum der rückgestreuten γ -Quanten zu messen. Außerdem können existierende Hochleistungslaser die erforderlichen dichten Photonentargets erzeugen. Einer Realisierung des hier vorgeschlagenen Laserpolarimeters zum gegenwärtigen Zeitpunkt steht allein die niedrige Pulsrate von Hochleistungslasern entgegen. Würde man die vorgeschlagene Anordnung am SLAC-SLC-Beschleuniger installieren, so könnte man nur für jede 10^5 -te Reaktion zwischen beschleunigten Elektronen und Positronen ein Lasertarget zur Verfügung stellen. Laser mit deutlich verbesserten Pulsraten sind jedoch zu erwarten infolge der Erfordernisse auf anderen Gebieten der Laseranwendung (z.B. Laser-induzierte Kernfusion).

Im Rahmen der Diskussion polarisationsabhängiger Wirkungsquerschnitte im Hinblick auf die Messung der Polarisation von Elektronen werden einige interessante Eigenschaften von Helizitätsamplituden zusammengestellt bzw. abgeleitet. So wird gezeigt, daß bei kollinear kollidierenden Teilchen mit beliebigem Spin und beliebiger Masse die Abhängigkeit der Helizitätsamplitude vom Azimutwinkel aus einem einfachen Phasenfaktor besteht. Damit läßt sich die Azimutwinkelverteilung der Streuprodukte bei der Kollision polarisierter Teilchen explizit angeben. Ferner wird untersucht, welche der Polarisationsasymmetrien des Wirkungsquerschnittes infolge von Paritätserhaltung verschwinden, welche in niedrigster Ordnung der Störungstheorie und welche in Hochenergienäherung Null werden.

Im Zusammenhang mit der Behandlung von mehrfacher Compton-Streuung wird ein Ausdruck für den Polarisationsgrad Compton-gestreuter Elektronen in Abhängigkeit von der longitudinalen Polarisation der Elektronen und der zirkularen Polarisation der Photonen angegeben.

Für die vorliegende Arbeit wurde ferner eine Überprüfung der Wirkungsquerschnitte für die Fälle Möller-, Bhabha- und Compton-Streuung sowie für den Fall der elastischen Elektron-Proton-Streuung vorgenommen, wobei die Polarisation der einfallenden Teilchen berücksichtigt ist. Die Berechnungen wurden mit einem von Anders und Jachmann angegebenen Verfahren zur Bestimmung von Helizitätsamplituden durchgeführt.

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG	1
2. POLARISATIONSMESSUNG DURCH SEKUNDÄRE STREUUNG	10
2.1. Polarisationsabhängigkeit von Wirkungsquerschnitten	10
2.1.1. Streuung zweier Spin-1/2-Teilchen am Beispiel der Bhabha-Streuung	10
2.1.2. Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin	39
2.2. Polarisationsmessung von gestreuten Teilchen	51
2.2.1. Effektivität und Erfolgsbedingungen einer Polarisationsmessung (Qualitätsparameter N_o)	54
2.2.2. Kaskadenprozess zur Polarisationsmessung	60
3. AUSWAHL DER ANALYSEPROZESSE ZUR POLARISATIONSMESSUNG VON HOCHENERGETISCHEN ELEKTRONEN	75
3.1. Energiebereich	76
3.2. Zählraten	76
3.3. Kinematik; Energie- und Impulsüberträge	78
3.3.1. Ruhendes Target	79
3.3.2. Photonentarget	84
3.4. Polarisationsgrad des Targets	86
3.5. Zusammenfassung	87
4. STREUUNG VON LEPTONEN AN UNPOLARISIERTEN TARGETS	89
4.1. Struktur des Wirkungsquerschnittes	89
4.2. Mögliche Polarisationsmessung an unpolarisierten Targets	92
4.3. Näherungen	94

4.4. Nichtstörungstheoretische Lösungen	96
von Potentialstreu Problemen	96
4.4.1. Mott-Streuung	96
4.4.2. Bremsstrahlung im Potentialfeld	98
4.5. Zusammenfassung: Polarisationsmessung	99
durch Streuung an unpolarisierten Targets	99
5. POLARISATIONSMESSUNG VON	
HOCHENERGETISCHEN ELEKTRONEN	
MITTELS STREUUNG AN POLARISIERTEN	
MASSIVEN SPIN-1/2-TEILCHEN	100
5.1. Struktur der Wirkungsquerschnitte	100
5.2. Mögliche Polarisationsmessungen:	103
5.2.1. Messung azimutwinkel-	
unabhängiger Streuasymmetrien	104
5.2.2. Messung azimutwinkel-	
abhängiger Streuasymmetrien	106
5.3. Energiespektren	112
5.4. Analyse der polarisationsabhängigen	
Wirkungsquerschnitte von folgenden Reaktionen:	114
5.4.1. Paarvernichtungsprozesse:	114
5.4.1.1. $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$,	118
5.4.1.2. $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$,	122
5.4.1.3. $e^+ + e^- \rightarrow 2 \gamma$;	124
5.4.2. Bhabha-Streuung;	129
5.4.3. Møller-Streuung;	134
5.4.4. Elastische Elektron-Proton-Streuung;	138
5.4.5. Inelastische Elektron-Proton-Streuung.	146
5.5. Zusammenfassung:	
Eignung der verschiedenen Reaktionen	
für die Polarisationsmessung	163

6. POLARISATIONSBESTIMMUNG VON ELEKTRONEN (POSITRONEN) MITTELS STREUUNG AN POLARISIERTEN PHOTONEN	167
6.1. Näherungsausdruck für die Compton-Streuung an Laserphotonen bei nicht-kollinearer Kollision	168
6.1.1. Der Compton-Streuquerschnitt im Ruhssystem des Elektrons	169
6.1.2. Polarisations-Parameter und kinematische Größen im Laborsystem	171
6.1.3. Transformation der kinematischen Größen und der Polarisationsparameter beim Übergang vom Laborsystem zum Ruhssystem des Elektrons	174
6.1.4. Ableitung eines Näherungsausdruckes für die Compton-Streuung an schräg einfallenden Laser-Photonen	176
6.2. Winkelverteilung und Energiespektrum der rückgestreuten Photonen im Laborsystem	185
6.3. Vorschlag für eine experimentelle Anordnung zur Messung der longitudinalen Polarisation von Endzustandselektronen mit Hilfe eines Hochleistungslasers	193
6.3.1. Beschreibung der Anordnung	194
6.3.2. Diskussion der Effektivität und der Realisierbarkeit der Anordnung	202
6.4. Vielfachstreuung	221
6.4.1. Compton-Streuung in Abhängigkeit von der effektiven Weglänge (ohne Vielfachstreuung)	224
6.4.1. Compton-Streuung in Abhängigkeit von der effektiven Weglänge (mit Vielfachstreuung)	232
6.5. Zusammenfassung	262
7. PRINZIP UND EFFEKTIVITÄT DER POLARISATIONSMESSUNG VON $\mu^\pm$ UND $\tau^\pm$	264
7.1. Polarisationsabhängigkeit des Zerfallsspektrums	264
7.2. Effizienz der Polarisationsmessung	267

8. DISKUSSION DER ERGEBNISSE	271
8.1. Vergleich von Compton-Streuung mit anderen Analyseprozessen zur Messung der longitudinalen Polarisierung von Elektronen	271
8.2. Chancen und Bedingungen für die Realisierung eines Laser-Polarimeters; Ausblick	274
8.3. Polarisationsmessung von Tauonen gegen Polarisationsmessung von Elektronen mittels Compton-Streuung	276
 Anhang A : ÜBER DIE STRUKTUR VON HELIZITÄTS-AMPLITUDEN BEI KOLLINEARER KOLLISION	 278
A.1. Verhalten von Helizitätszuständen unter kontinuierlichen Lorentz-Transformationen: massive Teilchen ($m \neq 0$)	278
A.1.1. Definition von Helizitätszuständen	278
A.1.2. Helizitätszustände unter beliebigen Lorentz-Transformationen Λ	280
A.1.3. Spezialfall: räumliche Drehung	286
A.1.4. Spezialfall: drehungsfreie Lorentz-Transformation in z-Richtung	288
A.2. Verhalten von Helizitätszuständen unter kontinuierlichen Lorentz-Transformationen: masselose Teilchen ($m = 0$)	290
A.2.1. Definition von Helizitätszuständen	290
A.2.2. Helizitätszustände unter beliebigen Lorentz-Transformationen Λ	291
A.2.3. Beweis von (A-36a) für Photonen	292
A.3. Verhalten von Einteilchen-Helizitätszuständen unter diskreten Symmetrioperationen	297
A.3.1. Dirac-Teilchen	299
A.3.2. Photonen	300

A.4.	Transformationsverhalten von Helizitätsamplituden für kollinear einfallende Teilchen	301
A.4.1.	Rotation $\tilde{R}_z(\phi)$ um die z-Achse mit Drehwinkel ϕ	302
A.4.2.	Paritätsoperation $\tilde{P}$	303
A.4.3.	Spiegelung $\tilde{G}_0$ an der x-z-Ebene	303
A.4.4.	Ladungskonjugation $\tilde{C}$	304
A.4.5.	Zeitumkehrtransformation $\tilde{T}$	304
A.4.6.	Produkttransformation $\tilde{R}_y(\pi)\tilde{T}$	305
Anhang B :	ÜBER DIE STRUKTUR DES WIRKUNGS- QUERSCHNITTES FÜR DIE KOLLINEARE KOLLISION POLARISierter TEILCHEN	307
B.1.	Das Transformationsverhalten der Dichtematrix massiver Teilchen	308
B.2.	Das Transformationsverhalten der Dichtematrix masseloser Teilchen	315
B.3.	Die Struktur von Wirkungsquerschnitten mit polarisierten Teilchen im Anfangszustand	318
B.3.1.	Spezialfall: Spin-1/2 + Spin-1/2 $\rightarrow$...	323
B.3.2.	Spezialfall: Spin-1/2 + Photon $\rightarrow$...	325
B.4.	Hochenergienäherung für die Streuung von Spin-1/2-Teilchen	327
B.4.1.	Diagramme ohne Austauschsterme	329
B.4.1.1.	Streuung eines Spin-1/2-Teilchens	329
B.4.1.2.	Paarvernichtung zweier Spin-1/2-Teilchen	331
B.4.2.	Streuung zweier identischer Spin-1/2-Teilchen (Auftreten von Austauschdiagrammen)	332
B.4.3.	Paarvernichtung zweier Spin-1/2-Teilchen (mit Austauschdiagrammen)	335
LITERATURVERZEICHNIS		338

1. EINLEITUNG

Spektakuläre Fortschritte auf dem Gebiet der Hochenergiephysik haben sich meist bald nach der Inbetriebnahme größerer und stärkerer Teilchenbeschleuniger eingestellt. Das zeigt ein Blick auf die Entwicklung der letzten Jahrzehnte. In der Tat ist die Erzeugung und damit der unmittelbare Nachweis neuer schwerer Teilchen nur durch eine entsprechende Erhöhung der verfügbaren Schwerpunktenergie möglich. Das jüngste Beispiel hierfür ist die Entdeckung der Vektorbosonen Z^0 und $W^\pm$: Zwar zeichneten sich Beiträge dieser Teilchen zu verschiedenen Wirkungsquerschnitten bereits bei niedrigeren Energien ab; der direkte Nachweis jedoch gelang erst mit Hilfe des p-p-Colliders am CERN.

Gerade im Zusammenhang mit Effekten der elektroschwachen Wechselwirkung wurde aber immer wieder darauf hingewiesen [1,2,3], daß die Untersuchung von Polarisierungseffekten beispielsweise in der Bhabha-Streuung in der Lage ist, Interferenzeffekte des Z^0 in einem Bereich weit unterhalb der Erzeugungsschwelle deutlich sichtbar zu machen, viel deutlicher als es durch die Messung unpolarisierter Wirkungsquerschnitte möglich ist. Diese Situation kann sich in einem anderen Energiebereich wiederholen, sodaß Polarisierungseffekte ein wichtiges Hilfsmittel bei der Suche nach neuen Teilchen oder Substruktur werden können.

Experimente, bei denen der Polarisationszustand der beteiligten Teilchen berücksichtigt wird, sind ein noch junger Zweig in der Hochenergiephysik. Dabei wird vor allem der Fall betrachtet, daß die Strahlteilchen polarisiert sind, während die Polarisierung der gestreuten Teilchen nicht gemessen wird.

In größerem Umfang stehen transversal polarisierte hochenergetische Elektronen und Positronen zur Verfügung, seit diese Teilchen in Speicherringen beschleunigt werden. Infolge von Synchrotron-Strahlung baut sich eine natürliche transversale Strahlpolarisation mit einem Polarisationsgrad von bis zu 92.4 % auf [4]. Sie führt zu charakteristischen Azimutwinkelverteilungen der Streuteilchen, welche sich leichter messen lassen als Polarwinkelverteilungen [5a]. Auf diese Weise können

z.B. Spinbestimmungen von Quarks und Gluonen durchgeführt werden [5b].

Auch longitudinal polarisierte hochenergetische Elektronenstrahlen lassen sich seit den siebziger Jahren erzeugen. Sie ermöglichten die Durchführung einer Reihe wichtiger Experimente. So wurden am SLAC mit longitudinal polarisierten Elektronen paritätsverletzende Anteile in der inelastische Elektron-Deuteron-Streuung nachgewiesen [11]. Asymmetriemessungen in der Streuung longitudinal polarisierter Elektronen an polarisierten Protonen an gleicher Stelle führten zu Aussagen über die Spinstruktur des Protons und widerlegten eine Reihe von Proton-Modellen [12,13]. Auf die besondere Bedeutung von longitudinaler Polarisation für zukünftige Experimente wird von vielen Autoren hingewiesen. Polarisationseffekte in der Streuung longitudinal polarisierter Elektronen werden diskutiert im Zusammenhang mit der Untersuchung der elektro-schwachen Wechselwirkung [6, 7], bei der Suche nach supersymmetrischen Teilchen [8, 9] und für die Feststellung einer eventuell vorhandenen Substruktur von Leptonen und Quarks [10].

Zur Zeit stehen longitudinal polarisierte Elektronen nur an Linearbeschleunigern zur Verfügung. An dem im Bau befindlichen Linear-Beschleuniger SLAC-SLC wird man nach dem gegenwärtigen Stand der Planung Elektronen mit einem Polarisationsgrad von 40–80 % bei beliebig wählbarer Polarisationsrichtung [14] erzeugen können. Aus den angeführten Gründen ist man bestrebt, auch an dem derzeit entstehenden Ringbeschleuniger HERA die notwendigen experimentellen Voraussetzungen für die Erzeugung longitudinal polarisierter Elektronen zu schaffen. Ein longitudinaler Polarisationsgrad von bis zu 79 % soll erzielt werden [15]. Dazu ist es erforderlich, die natürliche transversale Strahlpolarisation vor und nach der Wechselwirkungszone zu drehen. (Die Teilchen-Strahlen des LEP-Ringbeschleunigers allerdings werden voraussichtlich leider nicht polarisiert sein.)

Die Betrachtung von Polarisationsphänomenen ist notwendig, wenn bestimmte physikalische Größen – wie beispielsweise das relative Vorzeichen zwischen Vektor- und Axialvektorkopplungskonstante des Z^0 – gemessen werden sollen. In vielen Fällen – so auch in dem ange-

gegebenen Beispiel – ist es ausreichend, wenn man polarisierte Teilchenstrahlen verwendet und den Polarisationszustand der Streuteilchen unberücksichtigt läßt. Jedoch wird es mit zunehmender Strahlenergie in Ringbeschleunigern immer schwieriger, polarisierte Teilchen zu erzeugen. So zerstören Maschinenresonanzen die natürliche Strahlpolarisation in e^+e^- -Speicherringen weitgehend. (Dieses Problem ist bereits am LEP-Beschleuniger zu beobachten.) Damit geht ein Teil der Information eines Streueignisses verloren. Hier könnte die Messung des Polarisationsgrades gestreuter Teilchen Abhilfe schaffen, weil vielfach – so auch in dem angegebenen Beispiel für das Vorzeichen der Kopplungskonstanten – der Polarisationsgrad gestreuter Teilchen von denselben Parametern abhängt wie die Polarisationsasymmetrie des Wirkungsquerschnittes bezüglich der Spinrichtung der einlaufenden Teilchen. Das ist ein Grund, sich mit der Polarisationsmessung auch an gestreuten Teilchen zu befassen.

Darüberhinaus ist die Polarisationsmessung an gestreuten Teilchen notwendig, um sämtlich Polarisationsphänome zu erfassen. Nur durch die Streuung polarisierter Teilchen und die anschließende Bestimmung der Polarisation der Reaktionsprodukte lassen sich Amplituden mit Spin-Flip von solchen ohne Spin-Flip vollständig trennen. Dadurch ergeben sich interessante Perspektiven im Hinblick auf das Ausblenden von Teilamplituden. Angenommen, die Ströme zweier verschiedener Fermionen (ohne anomales magnetisches Moment) wechselwirken durch Austausch sowohl von skalaren Teilchen (z.B. Higgs-Teilchen) als auch von Vektorteilchen (z.B. Z^0 , Photonen) miteinander. Dann tragen (in Hochenergienäherung) zur Spin-Flip-Amplitude nur Diagramme bei, in denen eine ungerade Anzahl skalarer Teilchen ausgetauscht wird. Die Wechselwirkung über Vektorteilchen dagegen verursacht keine Spin-Umkehr [16]. Die Spin-Flip-Amplitude enthält somit in reiner Form Information über die skalare Wechselwirkung.

Dieses qualitative Beispiel zeigt, weshalb sich die zusätzliche Messung der Polarisation von gestreuten Teilchen günstig auf die Entdeckung und Untersuchung neuer Wechselwirkungen auswirken kann. Konkrete Rechnungen bestätigen die Nützlichkeit einer Polarisationsmessung an Streuteilchen. So wirkt sich z.B. bei der Bhabha-Streuung der Z^0 -

Beitrag auf die Polarisation der gestreuten Teilchen schon in einem Energiebereich kräftig aus, in dem dieser Beitrag zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt noch sehr klein ist [2,1]. Diese Situation kann sich bei der Untersuchung der Substruktur von Elektronen, Z^0 etc. – falls es eine solche gibt – wiederholen: Es ist denkbar, daß sich Effekte der Substruktur auf die Polarisation deutlich unterhalb der Energieskala der Substruktur bemerkbar machen. Auch bei der Suche nach supersymmetrischen Wechselwirkungen könnten Helizitätsasymmetrien eine wichtige Rolle spielen.

Polarisationsmessungen an Teilchen im Endzustand eines hochenergetischen Streuprozesses wurden bisher nur in einigen wenigen Fällen an instabilen Teilchen durchgeführt. So hat man beispielsweise die Polarisation von Myonen [17] und Tauonen [18] experimentell bestimmt, wobei aus der Emissionsrichtung bzw. aus dem Energiespektrum der Zerfallsprodukte auf den Polarisationsgrad geschlossen wurde.

Polarisationsmessungen an gestreuten Elektronen mit einer Energie im Bereich von GeV liegen bislang nicht vor.

Zur Begründung ist zu bemerken, daß die Polarisation von Elektronen generell schwer zu messen ist. Es existiert keine Vorrichtung, mit der man Elektronen verschiedener Polarisation vollständig voneinander trennen kann [19]. Eine dem Stern-Gerlach-Filter für Atomstrahlen entsprechende Anordnung ist für die geladenen Elektronen infolge der Unschärfebeziehung nicht realisierbar [19]. Um Aussagen über den Polarisationszustand von Elektronen zu erhalten, müssen die Teilchen einem zusätzlichen, notwendigerweise polarisationsabhängigen Streuprozess unterworfen werden. Die dabei entstehenden Streuprodukte enthalten die Information über die Polarisation der Elektronen.

Für hochenergetische Elektronen versagt die an niederenergetischen Elektronen mit Erfolg zur Polarisationsanalyse verwendete Mott-Streuung [19]. Die Polarisationsasymmetrie dieses Streuprozesses verschwindet mit ansteigender Energie der Elektronen.

Andere Verfahren müssen zur Polarisationsmessung hochenergetischer Elektronen herangezogen werden. Es ist bekannt, daß sich beispielsweise durch Møller-Streuung [20] oder durch Compton-Streuung an Laserphotonen [21] der Polarisationsgrad von Elektronenstrahlen sowohl in Linear- als auch in Ringbeschleunigern messen läßt. Diese Streuprozesse können prinzipiell auch zur Messung der Endzustandspolarisation verwendet werden. Dennoch besteht zwischen der Polarisationsbestimmung an Teilchenstrahlen und derjenigen an gestreuten Elektronen ein wesentlicher Unterschied: Während ein Teilchenstrahl aus sehr vielen Elektronen besteht, hat man für die Polarisationsanalyse im Endzustand eines hochenergetischen Streuprozesses in der Regel nur einige wenige Teilchen zur Verfügung. Neben der Größe der Polarisationsasymmetrie des Analyseprozesses kommt daher der Wahrscheinlichkeit, daß ein Streuteilchen an einem Analysestreuprozess teilnimmt, eine große Bedeutung zu. Sie legt die Ereignisrate fest und entscheidet, ob ein Streuprozess, der infolge einer vorhandenen Polarisationsasymmetrie grundsätzlich für eine Polarisationsmessung in Frage kommt, zur Messung der Endzustandspolarisation geeignet ist. Unter diesem Gesichtspunkt werden in der vorliegenden Arbeit eine ganze Reihe von Streuprozessen untersucht und bewertet.

Dabei wird in Kapitel 2 zunächst die Polarisationsabhängigkeit von Sekundärstreureaktionen betrachtet. Die Zweckmäßigkeit der Verwendung von Helizitätsamplituden [22,23,16] zur Berechnung der Polarisationsasymmetrien wird betont.

Abschnitt 2.1 beginnt mit der Erklärung einer Reihe von Begriffen aus der Physik polarisierter Teilchen (Helizitätszustand, Dichtematrix, lokales Koordinatensystem, Polarisationsgrad, Polarisationsasymmetrie). Es folgen einige Aussagen über die Struktur von Wirkungsquerschnitten kollinear kollidierender Teilchen. Diese Aussagen werden zunächst am Beispiel der Bhabha-Streuung erläutert und danach auf die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin erweitert. So wird gezeigt, daß für Helizitätsamplituden die Abhängigkeit vom Azimutwinkel aus einem einfachen spinabhängigen Phasenfaktor besteht. Infolgedessen läßt sich die Azimutwinkelabhängigkeit der Polarisationsasymmetrien des Wirkungsquerschnittes leicht explizit angeben und bei der Polarisations-

bestimmung nutzen. Weiter wird gezeigt, welche dieser Polarisationsasymmetrien in jeder Ordnung der Störungstheorie verschwinden, falls die Wechselwirkung die Parität erhält, d.h. keine axialen Kopplungen vorliegen. Außerdem werden die Auswirkungen von Näherungen auf die verschiedenen Polarisationsasymmetrien betrachtet: Dabei wird diskutiert, welche von ihnen in niedrigster Ordnung der Störungstheorie verschwinden müssen und welche bei Anwendung der Hochenergienäherung Null werden. Auf diese Weise erhält man – ohne explizit Wirkungsquerschnitte zu berechnen – einen Überblick, welche Streuprozesse für die Polarisationsmessung von hochenergetischen Elektronen überhaupt in Frage kommen.

Die technischen Details und die Beweise zu Abschnitt 2.1 sind in den Anhängen A und B zusammengestellt. So werden in Anhang A Helizitätszustände von Teilchen mit beliebigem Spin und beliebiger Masse bezüglich ihres Verhaltens bei Rotationen, drehungsfreien Lorentz-Transformationen und diskreten Symmetrioperationen untersucht. Der spezielle Fall einer Rotation um die z-Achse liefert den bereits erwähnten Phasenfaktor zur Beschreibung der Azimutwinkelabhängigkeit. Der dabei gewählte Zugang (Verwendung von Helizitätszuständen und gruppentheoretischen Methoden) basiert auf einer Arbeit von Jacob und Wick [22] und auf einer von von Novozhilov [23] gegebene Darstellung des Helizitätsformalismus. Gleichzeitig wird für die Spezialfälle "Spin-1/2-Teilchen" und "Photon" gezeigt, wie sich dieselben Aussagen aus den Eigenschaften von expliziten Darstellungen [16] der Spinoren und der Polarisationsvektoren ableiten lassen. In Anhang B werden die Helizitätsamplituden mit Hilfe der Dichtematrizen der Teilchen zum Wirkungsquerschnitt zusammengesetzt. Im Hinblick auf die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin werden sphärische Tensorkomponenten zur Parametrisierung der Spin-Dichtematrizen verwendet.

Abschnitt 2.2 beschreibt, wie sich die Polarisationsasymmetrien von Wirkungsquerschnitten zur Polarisationsanalyse von gestreuten Teilchen ausnutzen lassen. Dabei wird der Kaskadenprozess, d.h. die gesamte Reaktion bestehend aus der primären Wechselwirkung und aus den Streuprozessen zur Polarisationsanalyse der dabei entstehenden bzw. gestreuten Teilchen eingehend diskutiert. Außerdem wird die charak-

teristische Anzahl N_0 der Teilchen definiert, die man mindestens benötigt, um trotz statistischer Zählratenschwankungen beim Registrieren der Streuprodukte des Analyseprozesses eine vorgegebene Genauigkeit für die Messung des Polarisationsgrades zu erreichen. N_0 ist einerseits von der Dichte und den Abmessungen des Targets für die Analysestreuung sowie andererseits von der Natur des betrachteten Analyseprozesses abhängig. Es ist sinnvoll, diese beiden Abhängigkeiten gesondert zu behandeln und so experimentelle Bedingungen von physikalischen Schranken zu trennen. Es wird gezeigt, daß die Natur des Analyseprozesses in den Ausdruck für N_0 in Form einer Größe Σ eingeht, die aus dem unpolarisierten Wirkungsquerschnitt und dem Quadrat der Polarisationsasymmetrie besteht und als effektiver Wirkungsquerschnitt bezeichnet wird. Mit Hilfe der Größe Σ wird in den Kapiteln 4 bis 6 die Effektivität diverser Analysestreuungsprozesse diskutiert.

Die Bedingungen, unter denen eine Analysestreuung für die Polarisationsmessung von Elektronen im Energiebereich 1 GeV bis 1 TeV erfolgreich sein kann, werden in Kapitel 3 erörtert. Dieses Kapitel enthält Zahlenbeispiele für die zu erwartenden Energie- und Impulsüberträge. Sie machen auch deutlich, daß sich Effekte der schwachen Wechselwirkung in den Analyseprozessen ignorieren lassen, sodaß man sich auf die Diskussion von QED-Streuungsprozessen beschränken kann. Kapitel 3 enthält ferner eine Zusammenstellung von experimentellen Daten über die Polarisierbarkeit von Elektronen-, Protonen- und Photonentargets. Es wird gezeigt, daß der Polarisationsgrad von Festkörpertargets in der Größenordnung von 10 % liegt, während sich Photonentargets vollständig polarisieren lassen. Da die Polarisationsasymmetrie – und damit die Analysierstärke – eines Streuprozesses proportional zum Polarisationsgrad des Targets ist, sind Photonentargets sehr interessant.

Nach diesen theoretischen Vorbereitungen behandelt Kapitel 4 Reaktionen von hochenergetischen Elektronen mit unpolarisierten massiven Targets beliebigen Spins hinsichtlich ihrer Eignung für die Polarisationsanalyse. Näher untersucht wird die in Niederenergieexperimenten zur Polarisationsmessung verwendete Mott-Streuung. Außerdem wird die Bremsstrahlung im Kernfeld eingehender betrachtet, weil hochenerge-

tische Elektronen bevorzugt durch diesen Streuprozess Energie verlieren. Es wird gezeigt, daß unpolarisierte Targets nicht für die Polarisationsmessung von hochenergetischen Elektronen geeignet sind.

Infolgedessen muß in Kapitel 5 die Streuung von Elektronen und Positronen an polarisierten Targets aus Elektronen bzw. Protonen untersucht werden. Zunächst werden verschiedene Paarvernichtungsprozesse, danach Møller- und Bhabha-Streuung sowie elastische und inelastische Elektron-Proton-Streuung betrachtet. Es wird gezeigt, daß alle diese Prozesse für die Polarisationsmessung im Endzustand eines Streuprozesses zu ineffektiv sind.

Demgegenüber wird in Kapitel 6 auf eine Reihe vorteilhafter Eigenschaften hingewiesen, welche die Streuung von Elektronen an Laserphotonen als Analyseprozess für die Polarisation von Elektronen auszeichnet (großer Wirkungsquerschnitt auch für hochenergetische Elektronen, große Analysierstärke, nur Elektronen werden an Photontargets gestreut). Insbesondere lassen sich bei Verwendung von Photonen aus Hochleistungslasern große Ereignisraten erzielen. Es wird eine spezielle Anordnung diskutiert, bei der ein kurzer, stark gebündelter Laserpuls dicht neben der Wechselwirkungszone vorbeifliegt, während die primäre Wechselwirkung stattfindet. Elektronen, welche das Photonenbündel durchqueren, werden zum Teil Compton-gestreut. Die dabei entstehenden harten γ -Quanten werden registriert. Von dieser Anordnung wird herausgestellt, daß sie grundsätzlich (d.h. bezüglich der Leistung existierender Laser, des Nachweises der harten Photonen) mit heute zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln realisierbar ist, mit der Einschränkung, daß die Pulsrate der benötigten Hochleistungslaser gegenwärtig noch zu klein ist, um bei der Frequenz des SLAC-SLC-Beschleunigers (180 Hz) für eine ausreichend große Zahl von Primärprozessen ein Photontarget zur Verfügung zu stellen. Es bestehen jedoch begründete Hoffnungen (Fusionsforschung, etc.) auf eine Steigerung der Laser-Pulsrate.

Bei der Diskussion des hier vorgeschlagenen Laser-Analysators wird zunächst angenommen, daß ein Elektron beim Durchlaufen des Photontargets höchstens einmal gestreut wird. In Abschnitt 6.4 wird

diese Voraussetzung fallengelassen und der Energieverlust von Elektronen beim Passieren dichter Photonentargets als Funktion der im Target zurückgelegten Wegstrecke unter Berücksichtigung von Mehrfachstreuung betrachtet. Dabei werden keine Annahmen über eine experimentelle Anordnung gemacht, sodaß sich mit den Ergebnissen dieses Abschnittes beliebige Polarimeter-Vorrichtungen bezüglich Polarisationsasymmetrie und Effizienz beurteilen lassen. Im Rahmen der Behandlung von Mehrfachstreuung wird auch der Polarisationsgrad Compton-gestreuter Elektronen berechnet, bei beliebiger longitudinaler Polarisation der Elektronen und zirkularer Polarisation der Laserphotonen.

Im Unterschied zur Polarisationsmessung an den stabilen Elektronen wird in Kapitel 7 kurz beschrieben, wie man die Polarisation der instabilen Myonen und Tauonen mißt. Die Effektivität dieser Messungen wird berechnet. Bei Paarerzeugungsprozessen, in denen hochenergetische Leptonen entstehen, sind unter der Voraussetzung von Universalität der Wechselwirkung Elektronen, Myonen und Tauonen austauschbar. Die Polarisationsmessung von Myonen und Tauonen konkurriert also mit derjenigen von Elektronen und gehört daher ebenfalls zum Thema dieser Arbeit.

In Kapitel 8 werden abschließend die verschiedenen Prozesse zur Polarisationsanalyse von Elektronen miteinander verglichen (Abschnitt 8.1). Es werden Chancen und Bedingungen für die Realisierung eines Laserpolarimeters diskutiert (Abschnitt 8.2) und die Polarisationsmessung von Elektronen derjenigen von Tauonen gegenübergestellt (Abschnitt 8.3). Dabei wird herausgestellt, daß Compton-Streuung an den Photonen eines Hochleistungs-Lasers den am besten geeigneten Analyseprozess darstellt. Mit solchen Laser-Targets braucht man für eine Polarisationsmessung von gestreuten Elektronen nicht mehr Probeteilchen als für eine Polarisationsmessung von erzeugten Tauonen. Gegenwärtig ist die Pulsrate von Hochleistungs-Lasern noch zu klein, um für jeden primären Wechselwirkungsprozess ein Photonentarget erzeugen zu können.

2. POLARISATIONSMESSUNG DURCH SEKUNDÄRE STREUUNG

Gegenstand von Abschnitt 2.1 ist die Polarisationsabhängigkeit von Wirkungsquerschnitten für die Streuung zweier kollinear kollidierender Teilchen. Über die Spinzustände der Streuprodukte wird summiert. In Abschnitt 2.2 wird die Verwendung sekundärer Streuprozesse dieses Typs (polarisierte Einschußteilchen, unbeobachtete Polarisation der Streuteilchen) zur Analyse der Polarisation primär gestreuter Teilchen diskutiert.

2.1. Polarisationsabhängigkeit von Wirkungsquerschnitten

Dieser Abschnitt enthält eine kurze Einführung in die Streuung polarisierter Teilchen. Am Beispiel der Bhabha-Streuung werden in Abschnitt 2.1.1 Begriffe wie Helizitätsamplitude, Dichtematrix, Polarisationsgrad und Polarisationsasymmetrie erläutert. Am Ende von Abschnitt 2.1.1 wird eine Darstellung des polarisierten Wirkungsquerschnittes vorgeschlagen, in der die Dichtematrix durch sphärische Tensorkomponenten parametrisiert ist. Sie läßt sich leicht auf die Streuung polarisierter Teilchen mit beliebigem Spin übertragen. In Abschnitt 2.1.2 ist das Resultat dieser Verallgemeinerung angegeben (Eine ausführlichere Behandlung dieses allgemeinen Falles findet man in den Anhängen A und B) .

2.1.1. Streuung zweier Spin-1/2-Teilchen am Beispiel der Bhabha-Streuung

Vorbemerkung: Die Formeln in diesem Abschnitt gelten in den wesentlichen Punkten für jeden Streuprozess, bei dem im Anfangs- und Endzu-

stand je zwei Spin-1/2-Teilchen vorliegen. Die Spezialisierung auf Bhabha-Streuung erfolgt lediglich, um ein wohlbekanntes und konkretes Beispiel vor Augen zu haben.

Matrizelemente und Wirkungsquerschnitt

Ein Positron, beschrieben durch den Zustandsvektor $|p_1, \mu_1\rangle$ (Impuls p_1 , Spinparameter μ_1), kollidiert mit einem Elektron im Zustand $|p_2, \mu_2\rangle$ (Impuls p_2 , Spinparameter μ_2). Bei der Wechselwirkung entstehen ein gestreutes Positron im Zustand $|p_3, \mu_3\rangle$ und ein gestreutes Elektron mit Zustandsvektor $|p_4, \mu_4\rangle$. Die Zustandsvektoren erhält man aus dem Vakuum durch die Wirkung von Teilchen-Erzeugungsoperatoren. Der Spinparameter μ_i von Teilchen i gibt die Spineinstellung bezüglich der im Ruhesystem des Teilchens festgelegten Quantisierungsrichtung an. Die Impulse p_i der Teilchen werden im Laborsystem xyz beschrieben (vgl. Abb. 2-1). Sie lassen sich durch die Polarwinkel Θ_i und die Azimutwinkel Φ_i ausdrücken.

$$\begin{aligned} p_i &= |p_i| (\sin\Theta_i \cos\Phi_i, \sin\Theta_i \sin\Phi_i, \cos\Theta_i) \\ &\equiv \{ |p_i|, \Theta_i, \Phi_i \}. \end{aligned} \quad (2-1)$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung ist proportional zum Betragsquadrat des Matrizelementes ME des Streuoperators S .

$$ME \equiv \langle p_3, \mu_3 ; p_4, \mu_4 | S | p_1, \mu_1 ; p_2, \mu_2 \rangle, \quad (2-2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |ME|^2. \quad (2-3)$$

Die Diskussion der Spinabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes (2-3) beginnen wir mit einigen Bemerkungen zu den Teilchenzuständen $|p_i, \mu_i\rangle$. Eine ausführlichere und allgemeinere Diskussion ist im Anhang A zu finden.

Helizitätszustände

(Wigner-Transformation, lokales Koordinatensystem)

Jeder der Zustandsvektoren $|\mathbf{p}_i, \mu_i\rangle$, $i = 1, \dots, 4$, wird nach Basiszuständen zerlegt. Die Basisvektoren lassen sich auf unterschiedliche Weise festlegen. Im folgenden wird die Helizitätsdarstellung benutzt. Deren Basiszustände $|\mathbf{p}_i, \lambda_i\rangle$ sind durch den Helizitätsindex $\lambda_i = \pm 1/2$ und den Impuls $\mathbf{p}_i$ charakterisiert.

$$|\mathbf{p}_i, \mu_i\rangle = \alpha(\mu_i)_{+1/2} |\mathbf{p}_i, +1/2\rangle + \alpha(\mu_i)_{-1/2} |\mathbf{p}_i, -1/2\rangle. \quad (2-4)$$

Die Größen $\alpha(\mu_i)_{\lambda_i}$ sind Entwicklungskoeffizienten mit der Normierungsbedingung

$$|\alpha(\mu_i)_{+1/2}|^2 + |\alpha(\mu_i)_{-1/2}|^2 = 1. \quad (2-5)$$

zur Erhaltung der Wahrscheinlichkeit. Die Definition der Helizitätszustände und die Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten wird im folgenden näher betrachtet.

Den *Helizitätszustand* $|\mathbf{p}_i, \lambda_i\rangle$ eines Teilchens mit Impuls $\mathbf{p}_i$ kann man aus einem ruhenden Zustand $|\mathbf{0}, \lambda_i\rangle$ (λ_i ist die Spinkomponente in Richtung der z-Achse des Laborsystems xyz) durch Lorentz-Transformation erhalten. Der erzeugte Zustandsvektor hängt allerdings davon ab, auf welche Weise man das ruhende Teilchen mit Impuls $\mathbf{0}$ in ein Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}_i$ überführt. (Z.B. kann man einer Lorentz-Transformation $\Lambda: \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p}_i$ eine beliebige Drehung R vorausgehen lassen. Auch für $\Lambda' = \Lambda \cdot R$ gilt $\Lambda': \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p}_i$. Durch die Drehung R wird jedoch aus einem ruhenden reinen Helizitätszustand $|\mathbf{0}, \lambda_i\rangle$ eine Linearkombination aus zwei ruhenden Helizitätsbasisvektoren mit verschiedener Helizität. Wendet man darauf Λ an, so erhält man einen anderen Zustand als bei direkter Anwendung von Λ auf den Vektor $|\mathbf{0}, \lambda_i\rangle$.) Es ist daher notwendig, die Lorentz-Transformation festzulegen, um zu eindeutig definierten Basiszuständen $|\mathbf{p}_i, \lambda_i\rangle$ zu gelangen.

Diese spezielle Lorentz-Transformation $L(\mathbf{p}_i)$, auch Wigner-Transformation genannt, besteht für Helizitätszustände aus der Hintereinanderausführung zweier Operationen (vgl. Anhang A.1.1 und z.B. [23,24]): Ein Zustand $|\mathbf{p}_i, \lambda_i\rangle$ wird aus einem ruhenden Zustand $|\mathbf{0}, \lambda_i\rangle$ erzeugt durch eine drehungsfreie Lorentz-Transformation $B_z(|\mathbf{p}_i|)$ in Richtung der positiven z-Achse ($\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p}_i = (0, 0, |\mathbf{p}_i|)$) und eine darauffolgende Drehung $R_{\mathbf{n}_i}(\theta_i)$ von $\mathbf{p}_i$ um die Achse $\mathbf{n}_i$,

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{p}_i}{|\mathbf{e}_z \times \mathbf{p}_i|} = (-\sin\phi_i, \cos\phi_i, 0), \quad (2-6)$$

mit Drehwinkel θ_i ("Kipp-Drehung"). Dieselbe Wigner-Transformation erhält man, wenn zunächst die Drehung $R_{\mathbf{n}_i}(\theta_i)$ und danach eine drehungsfreie Lorentz-Transformation $B_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{p}_i|) : \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p}_i$ in Richtung des Impulses $\mathbf{p}_i$ ausgeführt wird. Zusammengefaßt:

$$L(\mathbf{p}_i) = R_{\mathbf{n}_i}(\theta_i) B_z(|\mathbf{p}_i|) = B_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{p}_i|) R_{\mathbf{n}_i}(\theta_i). \quad (2-7a)$$

Die Vorschrift (2-7a) ist eindeutig für alle Impulsrichtungen bis auf die Richtung der negativen z-Achse. Auch dort wird sie eindeutig, indem man den speziellen Impuls $\mathbf{p} = (0, 0, -|\mathbf{p}|)$ durch das Zahlentripel $\{|\mathbf{p}|, \pi, \pi\}$ (vgl. (2-1)) darstellt [23]:

$$(0, 0, -|\mathbf{p}|) \text{ entspricht } \{|\mathbf{p}|, \pi, \pi\}. \quad (2-8)$$

Diese Vorschrift bewirkt, daß für jede Richtung der Übergang zur entgegengesetzten Richtung durch $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \pi + \phi$ beschrieben wird.

Die Diskussion der Entwicklungskoeffizienten $\alpha(\mu_i)_{\lambda_i}$ aus (2-4) führt auf den Begriff des *lokalen Koordinatensystems* eines Teilchens mit Impuls $\mathbf{p}_i$. Dieses geht aus dem Laborsystem durch die Kipp-Drehung $R_{\mathbf{n}_i}(\theta_i)$ hervor (Abb. 2 - 1). Die Helizitätszustände $|\mathbf{p}_i, \lambda_i\rangle$ sind ja gerade so definiert sind, daß sie durch Anwenden der Wigner-Transformation (2-7a) aus den Zuständen $|\mathbf{0}, \lambda_i\rangle$ (s.o.) entstehen. Es bleiben also die Entwicklungskoeffizienten $\alpha(\mu_i)_{\lambda_i}$ eines beliebigen Zustandes mit Impuls $\mathbf{p}_i$ (vgl. (2-4)) bei der Rücktransformation zum Ruhssystem unverändert,

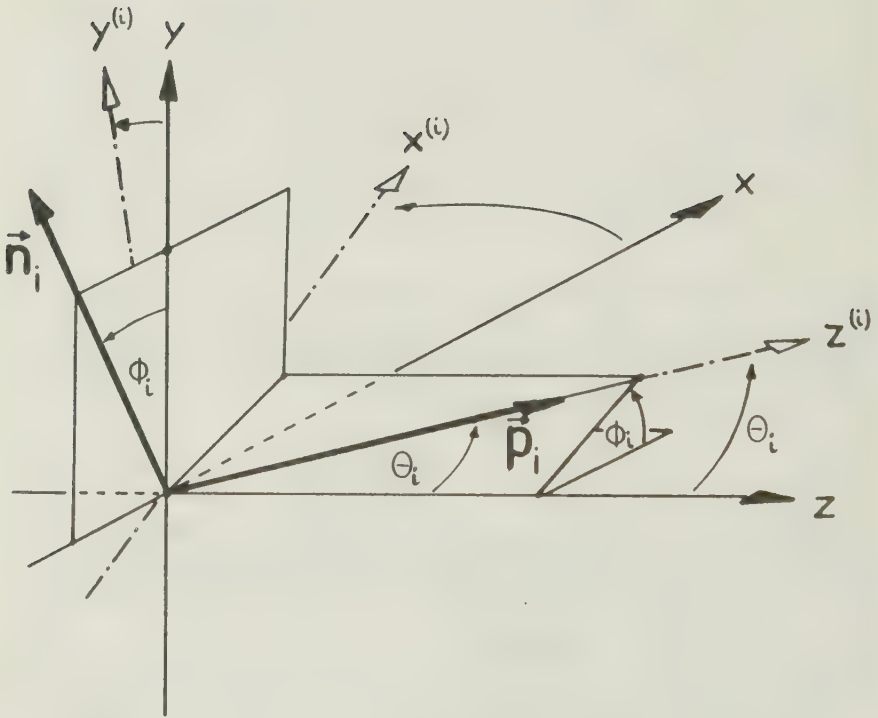


Abb. 2 - 1 : Laborsystem xyz und lokales Koordinatensystem $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ eines Teilchens mit Impuls $\mathbf{p}_i = \{ |\mathbf{p}_i|, \theta_i, \phi_i \}$ (s. Gl. (2-1)). Das LKS $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ entsteht aus xyz durch Drehung um den Vektor $\mathbf{n}_i = (-\sin\phi_i, \cos\phi_i, 0) \sim \mathbf{e}_z \times \mathbf{p}_i$ mit Drehwinkel θ_i . Die Achse $z^{(i)}$ weist in Richtung des Impulses $\mathbf{p}_i$.

falls diese Rücktransformation mittels der inversen Wigner-Transformation $L^{-1}(\mathbf{p}_i)$ aus (2-7a) erfolgt.

$$L^{-1}(\mathbf{p}_i) = B_{-z}(|\mathbf{p}_i|) R_{-\mathbf{n}_i}(\theta_i) = R_{-\mathbf{n}_i}(\theta_i) B_{-\mathbf{p}_i}(|\mathbf{p}_i|). \quad (2-7b)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\alpha(\mu_i)_{\lambda_i}$ lassen sich also im Laborsystem xyz bestimmen indem man entweder (bei Verwendung der 1. Darstellung von $L^{-1}(\mathbf{p}_i)$ in (2-7b)) die Flugrichtung des Teilchens zunächst in die z-Achse dreht und dann das Teilchen zur Ruhe bringt oder indem man (bei Verwendung der 2. Darstellung von $L^{-1}(\mathbf{p}_i)$ in (2-7b)) das Teilchen zuerst längs $\mathbf{p}_i$ abbremst und anschließend dreht. Die letztgenannte Vorschrift kann man umformulieren: Die Entwicklungskoeffizienten des rücktransformierten Zustandes im Koordinatensystem xyz sind die gleichen, die man erhält, wenn man auf die abschließende aktive Drehung $R_{-\mathbf{n}_i}(\theta_i)$ des Zustandes verzichtet, dafür aber die Koeffizienten in einem Koordinatensystem $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ berechnet, das durch die Drehung $R_{\mathbf{n}_i}(\theta_i)$ aus dem System xyz entsteht (= Übergang von aktiver zu passiver Transformation). Das Achsensystem $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ heißt *lokales Koordinatensystem* (vgl. Abb. 2 - 1) :

- Es ist unter Berücksichtigung von (2-7) für jeden Impuls eindeutig definiert;
- Seine z-Achse zeigt in Richtung des Teilchenimpulses;
- Man erhält die Entwicklungskoeffizienten eines Teilchenzustandes nach Helizitätsamplituden dadurch, daß man das Teilchen längs seines Impulses in den Ruhzustand zurücktransformiert und im lokalen Koordinatensystem auf die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators $\sigma_{z^{(i)}}$ projiziert.

Spin-Dichtematrix

Einsetzen der Entwicklung (2-4) in (2-3) ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega_3} &\sim \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \quad \lambda_2 \lambda_2' \\ \lambda_3 \lambda_3' \quad \lambda_4 \lambda_4'}} \alpha(\mu_1)_{\lambda_1} \alpha(\mu_1)_{\lambda_1'}^* \alpha(\mu_2)_{\lambda_2} \alpha(\mu_2)_{\lambda_2'}^* \\
 &\times \alpha(\mu_3)_{\lambda_3}^* \alpha(\mu_3)_{\lambda_3'} \alpha(\mu_4)_{\lambda_4}^* \alpha(\mu_4)_{\lambda_4'} \\
 &\times \langle \lambda_3 \lambda_4 \mid S \mid \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
 &\times \langle \lambda_3' \lambda_4' \mid S \mid \lambda_1' \lambda_2' \rangle^* \\
 &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \quad \lambda_2 \lambda_2' \\ \lambda_3 \lambda_3' \quad \lambda_4 \lambda_4'}} \rho(\mu_1)_{\lambda_1 \lambda_1'} \rho(\mu_2)_{\lambda_2 \lambda_2'} \rho(\mu_3)_{\lambda_3 \lambda_3'}^* \rho(\mu_4)_{\lambda_4 \lambda_4'}^* \\
 &\times \langle \lambda_3 \lambda_4 \mid S \mid \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
 &\times \langle \lambda_3' \lambda_4' \mid S \mid \lambda_1' \lambda_2' \rangle^* ,
 \end{aligned} \tag{2-9}$$

mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
 &\langle \lambda_3 \lambda_4 \mid S \mid \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
 &\equiv \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3 ; \mathbf{p}_4, \lambda_4 \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1 ; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{2-10}$$

und

$$\rho(\mu_i)_{\lambda_i \lambda_i'} \equiv \alpha(\mu_i)_{\lambda_i} \alpha(\mu_i)_{\lambda_i'}^* . \tag{2-11}$$

Die Matrix $\rho(\mu_i)$ beschreibt den Polarisationszustand von Teilchen i und wird als Spin-Dichtematrix des reinen Zustandes $|\mathbf{p}_i, \mu_i\rangle$ bezeichnet.

Die Bedeutung der Matrixelemente $\rho(\mu)_{\lambda\lambda'}$ für ein Elektron im Zustand $|\mathbf{p}, \mu\rangle$ läßt sich im lokalen Koordinatensystem xyz des Teilchen erklären (der Teilchenindex ist im folgenden unterdrückt): Nachdem man das Elektron durch die drehungsfreie Lorentz-Transformation $B_{-\mathbf{p}}(|\mathbf{p}|)$ zur Ruhe gebracht hat, wird $|\mathbf{p}, \mu\rangle$ aus (2-4) zu

$$|0, \mu_i\rangle = \alpha_+ |+\rangle + \alpha_- |-\rangle . \tag{2-12}$$

Dabei gilt in dieser und den folgenden Gleichungen die vereinfachte Bezeichnung

$$\alpha_{\pm} \equiv \alpha(\mu)_{\pm 1/2}, \quad |\pm\rangle \equiv |0, \lambda = \pm 1/2\rangle.$$

Die Zustände $|\pm\rangle$ sind Eigenvektoren des Spinoperators $\sigma_z/2$,

$$\frac{1}{2} \sigma_z |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm\rangle, \quad (2-13)$$

und bilden eine Basis des 2-dimensionalen Spinraumes. In Komponentenschreibweise bezüglich dieser Basis hat $|0, \mu_i\rangle$ die Darstellung

$$|0, \mu_i\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}. \quad (2-14)$$

Bildet man damit den Erwartungswert $\langle 0, \mu | \sigma | 0, \mu \rangle$ des Spinoperators $\sigma \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, so erhält man einerseits

$$\langle 0, \mu | \sigma_x | 0, \mu \rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \alpha_+^* \alpha_- + \alpha_-^* \alpha_+,$$

$$\langle 0, \mu | \sigma_y | 0, \mu \rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = -i (\alpha_+^* \alpha_- - \alpha_-^* \alpha_+),$$

$$\langle 0, \mu | \sigma_z | 0, \mu \rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = \alpha_+^* \alpha_+ - \alpha_-^* \alpha_-.$$

(2-15)

Auf der anderen Seite definieren diese Erwartungswerte den Polarisationsvektor $\mathbf{S}(\mu)$ eines Elektrons in dessen lokalem Koordinatensystem.

$$\langle 0, \mu | \sigma_k | 0, \mu \rangle \equiv S(\mu)_k, \quad k = x, y, z. \quad (2-16)$$

Durch Vergleich von (2-15) und (2-16) kann man die Produkte $\alpha_+^* \alpha_-$, $\alpha_+^* \alpha_+$ und $\alpha_-^* \alpha_-$ durch die Komponenten $S(\mu)_k$ des Spinvektors ausdrücken. Man erhält

$$\begin{aligned} \alpha_+^* \alpha_- &= (S(\mu)_x + i S(\mu)_y) / 2, \\ \alpha_+^* \alpha_+ &= (1 + S(\mu)_z) / 2. \end{aligned} \quad (2-17)$$

In die zweite dieser Beziehungen geht die Normierungsbedingung (2-5) ein. Die Spin-Dichtematrix hat somit die bekannte Gestalt

$$\begin{aligned} \rho(\mu) &= \begin{pmatrix} \rho(\mu)_{++} & \rho(\mu)_{+-} \\ \rho(\mu)_{-+} & \rho(\mu)_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + S(\mu)_z & S(\mu)_x - i S(\mu)_y \\ S(\mu)_x + i S(\mu)_y & 1 - S(\mu)_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \mathbf{S}(\mu) \cdot \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (2-18)$$

Eine analoge Darstellung der Dichtematrix kann man für Positronen angeben. Mit einem kleinen Unterschied: Wir verwenden die Phasenkonvention aus [16]. Danach ist in der Definition des Basiszustandes eines Positrons zu negativer Helizität ein Minuszeichen eingeschlossen (vgl. (A-15b) sowie die Fußnote 22 in [16]). Damit der Spinvektor erhalten bleibt, muß dieses Minuszeichen durch ein Minuszeichen im Entwicklungskoeffizienten α_- kompensiert werden. Die Elemente $\rho(\mu)_{+-}$ und $\rho(\mu)_{-+}$ erhalten daher bei dieser Definition der Basisvektoren ebenfalls einen Faktor -1 (vgl. (2-14)). Führt man einen Ladungsindex Q ein, mit den Werten $Q = +1$ für Elektronen und $Q = -1$ für Positronen, dann kann man die Dichtematrix für Elektronen und Positronen in der Form

$$\rho(\mu) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + S(\mu)_z & Q(S(\mu)_x - iS(\mu)_y) \\ Q(S(\mu)_x + iS(\mu)_y) & 1 - S(\mu)_z \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

angeben. Aus ihr entnimmt man unmittelbar die Hermitezitätseigenschaft

$$\rho(\mu)_{\lambda\lambda'} = \rho(\mu)_{\lambda'\lambda}^* \quad (2-20)$$

und die Normierung der Spur auf

$$\text{Tr } \rho(\mu) = \sum_{\lambda} \rho(\mu)_{\lambda\lambda} = 1. \quad (2-21)$$

Mit Hilfe von (2-15), (2-16) und der Normierungsbedingung (2-5) für die Entwicklungskoeffizienten α_{λ} kann man zeigen, daß der Betrag des Polarisationsvektors eines reinen Zustandes gleich 1 ist.

$$|S(\mu)|^2 = S(\mu)_x^2 + S(\mu)_y^2 + S(\mu)_z^2 = 1. \quad (2-22)$$

In der Regel liegen in Experimenten keine reinen Anfangs- und Endzustände vor. Man muß daher über die reinen Zustände mitteln. Das trifft sowohl für die Spins der Teilchen als auch für deren Impulse zu. Wir betrachten hier nur Spingemische zu reinen Impulszuständen.

Gegeben sei eine Anzahl von Teilchen mit Impuls p . Diese Teilchen seien mit der Wahrscheinlichkeit $g(\mu)$ in einem Zustand, der durch die Entwicklungskoeffizienten $\alpha_{\lambda}(\mu)$ und durch die Dichtematrix (2-11) beschrieben wird. Die Spinvariable μ läuft über alle Spinzustände, in denen sich Teilchen befinden. Es muß daher

$$\sum_{\mu} g(\mu) = 1 \quad (2-23)$$

gelten. Die Mittelung über die Spinzustände μ führt zur Definition der Spin-Dichtematrix eines statistischen Gemisches.

$$\rho_{\lambda\lambda'} \equiv \sum_{\mu} g(\mu) \cdot \rho(\mu)_{\lambda\lambda'} . \quad (2-24)$$

Dieser Definition und Gl. (2-23) ist zu entnehmen, daß Hermitezität (2-20) und Normierung der Spur (2-21) auch für Dichtematrizen eines Spingemisches erhalten bleiben. Ebenso bleibt die Form (2-19) für die Dichtematrix von Elektronen und Positronen unverändert, wenn man $S(\mu)$ durch den Polarisationsvektor

$$\mathbf{S} = \sum_{\mu} g(\mu) \cdot \mathbf{S}(\mu) \quad (2-25)$$

des Zustandsgemisches ersetzt. Durch die Vektoraddition in (2-25) wird aus Gl. (2-22) jetzt die Ungleichung

$$|\mathbf{S}|^2 \leq 1 . \quad (2-26)$$

Statistische Gemische können unpolarisiert sein. In dem Fall ist $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ und die Dichtematrix ist proportional zur Einheitsmatrix (vgl. (2-19)) :

$$\rho(\text{unpol})_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} / 2 . \quad (2-27)$$

Polarisierter Wirkungsquerschnitt

Mit Hilfe der Spin-Dichtematrix kann man den Wirkungsquerschnitt (2-9) für die Streuung polarisierter Teilchen angeben. Summiert man über die Polarisation der Teilchen im Endzustand und läßt im Anfangszustand Spingemische zu, so erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} \sim |\mathbf{ME}|^2 = \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \quad \lambda_2 \lambda_2' \\ \lambda_3 \lambda_4}} \rho_{\lambda_1 \lambda_1'} \rho_{\lambda_2 \lambda_2'} \\
 &\quad \times \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
 &\quad \times \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1' \lambda_2' \rangle^* \\
 &\equiv \sum_{\lambda_1 \lambda_1' \quad \lambda_2 \lambda_2'} \rho_{\lambda_1 \lambda_1'} \rho_{\lambda_2 \lambda_2'} W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} .
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$,

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} &\equiv \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\
 &\quad \times \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1' \lambda_2' \rangle^*, \quad (2-29)
 \end{aligned}$$

sind Produkte von Helizitätsamplituden mit der Eigenschaft

$$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} = W_{\lambda_1' \lambda_2'; \lambda_1 \lambda_2}^* . \quad (2-30)$$

Einsetzen der Dichtematrix (2-19) mit dem Polarisationsvektor aus (2-25) ergibt (wenn man der Einfachheit halber für $\lambda_i = \pm 1/2$ nur das Vorzeichen schreibt)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} \sim 4 |ME|^2 = \quad (2-31)$$

$$= [W_{+,+,++} + W_{-,-,-} + W_{+,-,+} + W_{-+,-}]$$

$$+ Q^{(1)} S_x^{(1)} [W_{+,-,+} + W_{+,-,-} + W_{-+,+} + W_{-,-,+}]$$

$$+ \dots$$

$$+ S_z^{(1)} [W_{+,+,+} + W_{+,-,+} - W_{-+,+} - W_{-,-,-}]$$

$$\begin{aligned}
 & + Q^{(2)} S_x^{(2)} [\dots \\
 & + \dots \\
 & + S_z^{(2)} [W_{++,+} - W_{+,-,+} + W_{-,-,+} - W_{--,-}] \\
 & + Q^{(1)} Q^{(2)} S_x^{(1)} S_x^{(2)} [\dots \\
 & + Q^{(1)} Q^{(2)} S_x^{(1)} S_y^{(2)} [\dots \\
 & + \dots \\
 & + S_z^{(1)} S_z^{(2)} [W_{++,+} + W_{--,-} - W_{+,-,+} - W_{-,-,+}] .
 \end{aligned}$$

Auf die Bedeutung der Komponenten $S_k^{(1)}$ und $S_k^{(2)}$ der Polarisationsvektoren von Teilchen 1 und 2 sei nochmals hingewiesen: Sie beschreiben den Spin der Teilchen im jeweiligen lokalen Koordinatensystem. Deshalb beziehen sich die Größen $S_k^{(1)}$ und $S_k^{(2)}$ auf verschiedene Koordinatensysteme (genaugenommen müßte der Index "k" selbst noch einen Teilchenindex tragen).

Die ersten 4 Summanden in (2-31) sind unabhängig vom Polarisationszustand. Sie beschreiben die Streuung unpolarisierter Teilchen. Die restlichen Summanden hängen entweder von einem der Polarisationsparameter $S_i^{(1)}$ oder $S_k^{(2)}$ ab oder sie sind proportional zu Produkten der Form $S_i^{(1)} S_k^{(2)}$ (Spin-Korrelationsterme). Dividiert man das Betragsquadrat des Matricelementes ME durch

$$\begin{aligned}
 & |ME|_{\text{unpol}}^2 \tag{2-32} \\
 & \equiv \frac{1}{4} [W_{++,+} + W_{--,-} + W_{+,-,+} + W_{-,-,+}] ,
 \end{aligned}$$

d.h. bildet man das normierte Betragsquadrat

$$|ME|_{\text{Norm}}^2 \equiv \frac{|ME|^2}{|ME|_{\text{unpol}}^2} \tag{2-33}$$

des Matricelementes, dann läßt sich der Wirkungsquerschnitt in die Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{d\sigma_o}{d\Omega_3} |ME|^2_{\text{Norm}} \quad (2-34)$$

$$= \frac{d\sigma_o}{d\Omega_3} \left\{ 1 + S_x^{(1)} A_{xo} + S_y^{(1)} A_{yo} + S_z^{(1)} A_{zo} \right. \\ + S_x^{(2)} A_{ox} + S_y^{(2)} A_{oy} + S_z^{(2)} A_{oz} \\ + S_x^{(1)} S_x^{(2)} A_{xx} + \dots \\ \left. + \dots + S_z^{(1)} S_z^{(2)} A_{zz} \right\}$$

bringen. Die Definition der Asymmetriekoeffizient A_{ik} mit i und $k = x, y, z$ oder o (o steht für unpolarisiert) folgt aus einem Vergleich mit (2-31). Der erste Index ist Teilchen 1, der zweite Teilchen 2 zugeordnet. Die Terme $S_x^{(1)} A_{xo}$, $S_x^{(2)} A_{ox}$, ... $S_x^{(1)} S_x^{(2)} A_{xx}$, ... bezeichnet man als Polarisationsasymmetrien. Das normierte Matrixelement $|ME|^2_{\text{Norm}}$ besteht also aus einer Eins, gefolgt von einer Summe von polarisationsabhängigen Termen.

Die Asymmetriekoeffizienten A_{ik} aus (2-34) werden heute nur noch selten verwendet, da sie nicht unabhängig voneinander sind. Später werden geeignetere Asymmetriekoeffizienten definiert.

Wirkungsquerschnitt für kollineare Kollision (1. Formulierung)

Im Hinblick auf spätere Anwendungen wird der Streuprozess in einem Bezugssystem betrachtet, in dem die Teilchen 1 und 2 kollinear aufeinanderprallen. Das Achsensystem xyz zur Beschreibung der Streuung wird so gewählt, daß Teilchen 1 in Richtung der positiven z -Achse, Teilchen 2 in Richtung der negativen z -Achse fliegt. Die lokalen Koordinatensysteme der Teilchen 1 und 2 für diesen Fall sind in Abb. 2-2 angegeben: $x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ fällt mit xyz zusammen; $x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ geht wegen

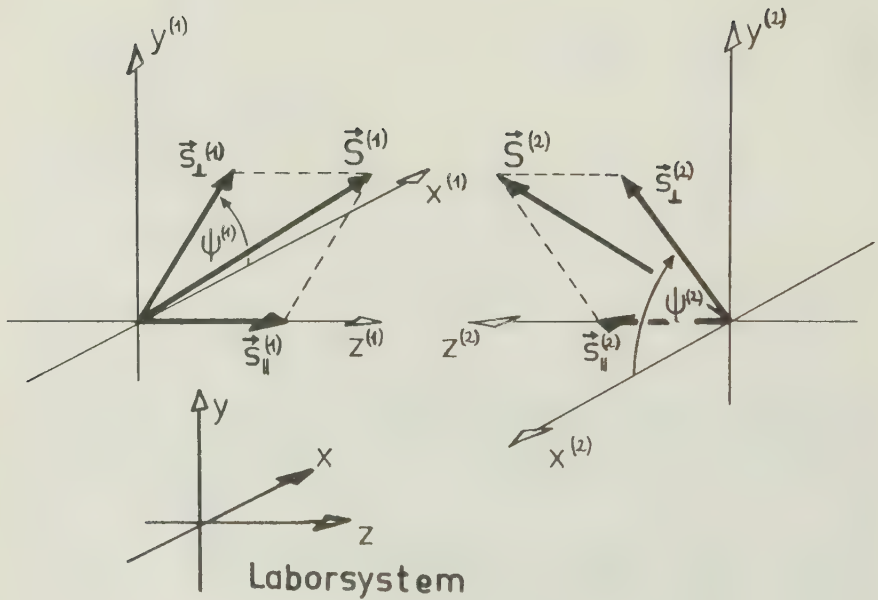


Abb. 2-2 : Die lokalen Koordinatensysteme (LKSe) der Teilchen 1 und 2 bei kollinearer Kollision: Das LKS $x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ von Teilchen 1 fällt mit dem Laborsystem xyz zusammen; das LKS $x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ von Teilchen 2 entsteht aus xyz durch Drehung um 180° um die y-Achse. In die Abbildungen sind die longitudinalen ($\vec{s}_{\parallel}^{(i)} = S_z^{(i)}\mathbf{e}_z$) und transversalen ($\vec{s}_{\perp}^{(i)} = S_x^{(i)}\mathbf{e}_x + S_y^{(i)}\mathbf{e}_y$) Komponenten der Spin-Vektoren zweier Spin-1/2-Teilchen eingetragen. Der Winkel zwischen $\vec{s}_{\perp}^{(i)}$ und der Achse $x^{(i)}$ des LKS wird mit $\psi^{(i)}$ bezeichnet.

(2-8) aus xyz durch Drehung um 180° um die y-Achse hervor.

Zur Festlegung der Kinematik der Bhabha-Streuung benötigt man (bei festgehaltener Schwerpunktenergie) 2 Parameter. Hierfür werden der Azimutwinkel ϕ_3 und der Polarwinkel θ_3 der Impulsrichtung des gestreuten Positrons (Teilchen 3) verwendet (vgl. Abb. 2 - 1). Von diesen beiden Winkeln hängen daher auch die Asymmetriekoeffizienten $A_{x_0}, \dots$ ab. Die Kenntnis des Verhaltens von Helizitätsamplituden unter räumlichen Drehungen erlaubt es nun, die ϕ_3 -Abhängigkeit der Asymmetriekoeffizienten explizit anzugeben.

Wie in Anhang A.2 ausführlich beschrieben, bleibt die Helizität eines Zustandes bei räumlichen Drehungen erhalten. (Anders bei beliebigen Lorentz-Transformationen: dort vermischen sich Helizitätszustände mit verschiedener Helizität.) Der Zustandsvektor ändert sich nur um einen Phasenfaktor. Dieser hängt bei beliebigen Drehungen im allgemeinen von der Impulsrichtung des Teilchenzustandes ab. Bei Drehungen $R_z(\phi)$ um die z-Achse jedoch hat man nur zwei Fälle zu unterscheiden: 1) Für alle Impulsrichtungen $\mathbf{p} \neq (0,0,-|\mathbf{p}|)$ gilt

$$\tilde{R}_z(\phi) |\mathbf{p}, \lambda\rangle = e^{-i\lambda\phi} |\mathbf{p}' = R_z(\phi)\mathbf{p}, \lambda\rangle. \quad (2-35)$$

Dabei ist ϕ der Drehwinkel der aktiven Drehung; der unitäre Operator $\tilde{R}_z(\phi)$ repräsentiert die Drehung $R_z(\phi)$ im Raum der Teilchenzustände. 2) Ein Zustand mit Impuls $\mathbf{p} = (0,0,-|\mathbf{p}|) \equiv \{\mathbf{p} = |\mathbf{p}|, \pi, \pi\}$ transformiert sich gemäß

$$\tilde{R}_z(\phi) |\{\mathbf{p}, \pi, \pi\}, \lambda\rangle = e^{+i\lambda\phi} |\{\mathbf{p}, \pi, \pi\}, \lambda\rangle \quad (2-36)$$

(siehe Anhang A.1.3). Der Grund für das abweichende Verhalten an der Stelle $\mathbf{p} = (0,0,-p)$ ist die Unstetigkeit der lokalen Koordinatensysteme für $\theta \rightarrow 180^\circ$ (vgl. Bemerkung zu (2-8)).

Die Rotationsinvarianz des Streuoperators S hat die Relation

$$S = \tilde{R}_z(\phi) S \tilde{R}_{-z}(\phi) \quad (2-37)$$

zur Folge. Daraus kann man mit (2-35) und (2-36) die Φ_3 -Abhängigkeit der Streuamplitude herleiten. Mit der vereinfachten Schreibweise

$$|\Theta_i, \Phi_i, \lambda_i\rangle \equiv |\{p_i, \Theta_i, \Phi_i\}, \lambda_i\rangle$$

für den Zustandsvektor erhält man

$$\begin{aligned} & \langle \Theta_3, \Phi_3, \lambda_3 ; \Theta_4, \Phi_4, \lambda_4 \mid S \mid 0, 0, \lambda_1 ; \pi, \pi, \lambda_2 \rangle \\ &= \langle \Theta_3, \Phi_3, \lambda_3 ; \Theta_4, \Phi_4, \lambda_4 \mid \tilde{R}_{-z}(-\Phi_3) \tilde{R}_z(-\Phi_3) \\ & \quad \times S \tilde{R}_{-z}(-\Phi_3) \tilde{R}_z(-\Phi_3) \mid 0, 0, \lambda_1 ; \pi, \pi, \lambda_2 \rangle \\ &= e^{+i\Phi_3(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)} \\ & \quad \times \langle \Theta_3, 0, \lambda_3 ; \Theta_4, \Phi_4 - \Phi_3, \lambda_4 \mid S \mid 0, 0, \lambda_1 ; \pi, \pi, \lambda_2 \rangle . \end{aligned} \tag{2-38}$$

Impulserhaltung bewirkt $\Phi_4 - \Phi_3 = \pi$.

Die Abspaltung der Φ_3 -Abhängigkeit in den Gln. (2-35), (2-36) und (2-38) in Form eines Phasenfaktors basiert auf einer Arbeit von Jacob und Wick [22]. In der Literatur ist bekannt, daß eine solche Faktorisierung auftritt, wenn man 2-Teilchen-Zustände im Schwerpunktsystem nach Partialwellen entwickelt. Sie wird infolgedessen häufig verwendet bei der Behandlung von 2-Teilchen-Reaktionen im Schwerpunktsystem (2 Teilchen im Anfangszustand und 2 Teilchen im Endzustand). Wie aus den Beziehungen (2-35) und (2-36) hervorgeht, tritt der Phasenfaktors als Folge der Rotationsinvarianz der Streuamplitude jedoch in jedem Bezugssystem auf. Er ist weder auf 2-Teilchen-Reaktion noch das Schwerpunktsystem beschränkt. So gilt beispielsweise die Relation (2-38) in jedem System, in dem die Teilchen kollinear einfallen.

Setzt man (2-38) in die Definitionsgleichung (2-29) für $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$ ein, so erhält man

$$W(\Phi_3, \Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = e^{i\Phi_3 [(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda'_1 - \lambda'_2)]} V(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} \quad (2-39)$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} V(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} &= W(\Theta_3, \Phi_3=0)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} \\ &= \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \langle \Theta_3, 0, \lambda_3; \Theta_4, \pi, \lambda_4 \mid S \mid 0, 0, \lambda_1; \pi, \pi, \lambda_2 \rangle \\ &\quad \times \langle \Theta_3, 0, \lambda_3; \Theta_4, \pi, \lambda_4 \mid S \mid 0, 0, \lambda'_1; \pi, \pi, \lambda'_2 \rangle^* , \end{aligned} \quad (2-40)$$

ist von Φ_3 unabhängig. Es gilt

$$V(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = V(\Theta_3)^*_{\lambda'_1 \lambda'_2; \lambda_1 \lambda_2} \quad (2-41)$$

Zwischen den 16 Helizitätsamplituden für Bhabha-Streuung bestehen Symmetrierelationen. Z.B. verknüpft die Invarianz des S-Operators gegenüber der Paritäts-Transformation die Helizitätsamplitude

$$\langle \mathbf{p}_3, \lambda_3; \mathbf{p}_4, \lambda_4 \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle$$

mit der Amplitude

$$\langle -\mathbf{p}_3, -\lambda_3; -\mathbf{p}_4, -\lambda_4 \mid S \mid -\mathbf{p}_1, -\lambda_1; -\mathbf{p}_2, -\lambda_2 \rangle ,$$

bei der die Impulse und Helizitäten der Teilchen umgedreht sind (vgl. Gl. (A-59)). Dabei ist der Vektor $-\mathbf{p}_i$ mit $\mathbf{p}_i = \{p_i, \Theta_i, \Phi_i\}$ definiert durch das Zahlentripel $\{p_i, \pi - \Theta_i, \pi + \Phi_i\} \equiv -\mathbf{p}_i$. Falls der Vektor $\mathbf{p}_3$ in der x-y-Ebene liegt, führt eine zusätzliche Drehung um 180° um die y-Achse auf die ursprünglichen Impulse zurück. Paritätsoperation und Drehung zusammengenommen verknüpfen somit Helizitätsamplituden, die durch Vorzeichenumkehr aller Helizitätsindizes auseinander hervorgehen. Die Phasenfaktoren, die bei den Teiloperationen auftreten, sind im Anhang in den Gln. (A-59) und (A-61) angegeben.

Infolge der Paritäts- und Rotationsinvarianz der Helizitätsamplituden erhält man die Beziehung

$$V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda'_1} (-1)^{\lambda_2 - \lambda'_2} V_{-\lambda_1, -\lambda_2; -\lambda'_1, -\lambda'_2} \quad (2-42)$$

für die Funktionen $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$. Unter Ausnutzung von (2-41) und (2-42) lassen sich z.B. folgende Relationen aufstellen (Index $\lambda = \pm 1/2$ vereinfacht zu $\lambda = \pm$) :

$$\begin{aligned} V_{++;++} &= V_{++;++}^* = V_{--;--} = V_{--;--}^* , \\ V_{++;+-} &= -V_{--;-+} = -V_{--;+-}^* , \\ V_{+-;+-} &= V_{-+;-+} = V_{-+;-+}^* , \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-43)$$

Mit Hilfe von (2-39) können diese Beziehungen auf die Funktionen $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ übertragen werden:

$$\begin{aligned} W_{++;++} &= V_{++;++} \\ &= W_{++;++}^* = W_{--;--} = W_{--;--}^* , \\ W_{++;+-} &= e^{-i\Phi_3} V_{++;+-} = -e^{-i\Phi_3} V_{--;-+} \\ &= -e^{-i2\Phi_3} W_{--;-+} = -e^{-i2\Phi_3} W_{--;+-}^* , \\ W_{+-;+-} &= V_{+-;+-} = W_{-+;-+} = W_{-+;-+}^* , \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-44)$$

Bei Paritäts-Invarianz verschwinden somit beispielsweise die Summanden proportional zu $S_z^{(1)}$ und $S_z^{(2)}$ in (2-31). Der Wirkungsquerschnitt ist – wie bekannt – von der longitudinalen Polarisation unabhängig, wenn nur ein Teilchen polarisiert ist.

Anmerkung: Anders, Barut und Jachmann [34] betrachten Bhabha-Streuung unter Einschluß axialer Kopplungen. Sie finden mit (2-44)

vergleichbare Formeln, wobei als Folge dieser paritätsverletzenden Anteile an einigen Stellen Operatoren auftreten, welche das Vorzeichen der axialen Kopplungen bzw. das Vorzeichen der infinitesimal kleinen imaginären Massenterme umkehren ($m^2 + i\epsilon \rightarrow m^2 - i\epsilon$). Im Grenzfall verschwindender axialer Kopplungen werden die Gln. (2-44) reproduziert.

Für die explizite Darstellung der ϕ_3 -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes ist es nützlich, (2-31) umzuschreiben. Dazu wird die Dichtematrix (2-19) auf andere Weise parametrisiert und in die Form (2-28) für den Wirkungsquerschnitt eingesetzt.

Anstelle der kartesischen Komponenten des Polarisationsvektors werden die 3 reellen Parameter $s_{\parallel}$, $s_{\perp}$ und ψ verwendet (vgl. [16] und die Überlegungen in [34]).

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_{\parallel} & Q s_{\perp} e^{-i\psi} \\ Q s_{\perp} e^{+i\psi} & 1 - s_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2-45)$$

Ein Vergleich von (2-45) mit (2-19) ergibt: $s_{\parallel}$ ist identisch mit S_z , der z-Komponente des Polarisationsvektors im lokalen Koordinatensystem; es gilt

$$S_x - i S_y = s_{\perp} e^{-i\psi} = s_{\perp} \cos\psi - i s_{\perp} \sin\psi; \quad (2-46)$$

$s_{\perp}$ ist daher der Betrag der zur z-Achse senkrechten Komponente des Polarisationsvektors $\mathbf{S}$ und ψ ist der Winkel, den diese Komponente mit der x-Achse bildet. In Abb. 2-2 sind die Winkel $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ sowie die transversalen Polarisationsvektoren $s_{\perp}^{(1)}$ und $s_{\perp}^{(2)}$ in die lokalen Koordinatensysteme der Teilchen 1 und 2 eingetragen.

Setzt man die Dichtematrix ρ in der Form (2-45) in (2-28) ein, verwendet die Darstellung (2-39) für $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ und spaltet alle Größen in Real- und Imaginärteil auf, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
 4 |ME|^2 = & [V_{++,+} + V_{--,-} + V_{+,-,+} + V_{-+,-}] \\
 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} & [V_{++,+} + V_{--,-} - V_{+,-,+} - V_{-+,-}] \\
 + s_{\parallel}^{(1)} \delta_P & [V_{++,+} - V_{--,-} + V_{+,-,+} - V_{-+,-}] \\
 + s_{\parallel}^{(2)} \delta_P & [V_{++,+} - V_{--,-} - V_{+,-,+} + V_{-+,-}] \\
 + s_{\perp}^{(1)} 2 Q^{(1)} & [\cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \delta_P \delta_H \operatorname{Re} (V_{++,-} + V_{+-,-}) \\
 & - \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \delta_N \delta_H \operatorname{Im} (V_{++,-} + V_{+-,-})] \\
 + s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} 2 Q^{(1)} & [\cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \delta_H \operatorname{Re} (V_{++,-} - V_{+-,-}) \\
 & - \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \delta_P \delta_N \delta_H \operatorname{Im} (V_{++,-} - V_{+-,-})] \\
 + s_{\perp}^{(2)} 2 Q^{(2)} & [\cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \delta_P \delta_H \operatorname{Re} (V_{++,-} + V_{-+,-}) \\
 & + \sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \delta_N \delta_H \operatorname{Im} (V_{++,-} + V_{-+,-})] \\
 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} 2 Q^{(2)} & [\cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \delta_H \operatorname{Re} (V_{++,-} - V_{-+,-}) \\
 & + \sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \delta_P \delta_N \delta_H \operatorname{Im} (V_{++,-} - V_{-+,-})] \\
 + s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} 2 Q^{(1)} Q^{(2)} & [\cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \delta_H \operatorname{Re} V_{++,-} \\
 & + \sin(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \delta_P \delta_N \delta_H \operatorname{Im} V_{++,-} \\
 & + \cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \operatorname{Re} V_{+,-,+} \\
 & - \sin(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \delta_P \delta_N \operatorname{Im} V_{+,-,+}] .
 \end{aligned}
 \tag{2-47}$$

Die Signaturen δ_P , δ_N und δ_H sind zusätzlich eingefügt. Ihr numerischer Wert ist 1. Ihre Aufgabe ist es, bestimmte Terme in (2-47) zu markieren.

So werden Summanden mit δ_P multipliziert, die für paritätsinvariante Wechselwirkungen verschwinden. Die Auswirkung von P-Invarianz läßt sich durch die Wahl $\delta_P = 0$ beschreiben.

Entsprechendes gilt für δ_N : Terme, die durch δ_N gekennzeichnet sind, verschwinden falls die Funktionen $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ reell sind. Das ist z.B. in einer zeitumkehrinvarianten Theorie in niedrigster störungstheoretischer Ordnung infolge der Unitarität des S-Operators automatisch der Fall (Begründung siehe Anhang A.4.6).

Terme proportional zu δ_H schließlich verschwinden in Hochenergienäherung, falls die Ströme der Spin-1/2-Teilchen nur über Vektor- und Axialvektorkopplung miteinander wechselwirken. Das ist für Bhabha-Streuung in niedrigster störungstheoretischer Ordnung (siehe Abb. 2 - 3) leicht einzusehen. (In Anhang B.4 wird gezeigt, daß dieses Resultat für jeden Streuprozess zweier Spin-1/2-Teilchen gültig bleibt, unabhängig von der Art und der Anzahl der Reaktionsprodukte.) Es ist bekannt [16], daß ein Spin-1/2-Teilchen seine Helizität längs eines Stromes beibehält, falls seine Masse gegenüber den Energien und Impulsen in den Propagatorzählern des Stromes vernachlässigt werden kann. Demnach wird die Teilamplitude $S^{(1)}$ (t-Kanal) zu Null, falls $\lambda_1 = -\lambda_3$ oder $\lambda_2 = -\lambda_4$ ist. Die Teilamplitude $S^{(2)}$ (s-Kanal) verschwindet für $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $\lambda_3 = \lambda_4$. (Die Helizität eines Antiteilchens wird in der zitierten Helizitätsregel in Pfeilrichtung gezählt und ist daher das Negative der tatsächlichen Helizität λ_1 bzw. λ_3 der Teilchen.) Nun ist nach (2-29)

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} &= \\
 &= \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \left[\begin{aligned} &\langle \lambda_3 \lambda_4 | S^{(1)} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle + \langle \lambda_3 \lambda_4 | S^{(2)} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned} \right] \\
 &\quad \times \left[\begin{aligned} &\langle \lambda_3 \lambda_4 | S^{(1)} | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle + \langle \lambda_3 \lambda_4 | S^{(2)} | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle \end{aligned} \right]^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(1)} \left| \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(1)} \left| \lambda'_1 \lambda'_2 \right\rangle^* \\
 & + \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(1)} \left| \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(2)} \left| \lambda'_1 \lambda'_2 \right\rangle^* \\
 & + \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(2)} \left| \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(1)} \left| \lambda'_1 \lambda'_2 \right\rangle^* \\
 & + \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(2)} \left| \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle \left\langle \lambda_3 \lambda_4 \right| S^{(2)} \left| \lambda'_1 \lambda'_2 \right\rangle^* . \quad (2-48)
 \end{aligned}$$

Für $\lambda'_1 = -\lambda_1$ z.B. verschwindet $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$, weil in allen Summanden eine der beiden Teilamplituden helizitätsunterdrückt ist.

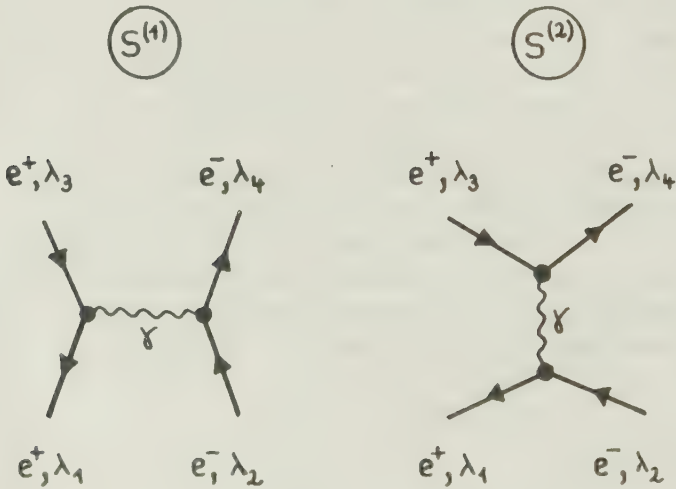


Abb. 2 - 3 : Die zwei Diagramme zur Bhabha-Streuung in niedrigster Ordnung der Störungstheorie.

Gl. (2-47) für die Azimutwinkelabhängigkeit der Streuprodukte bei Elektron-Positron-Streuung ist in jeder Ordnung der Störungstheorie richtig und frei von Näherungen. Sie enthält die vollständige Abhängigkeit von der Polarisierung der Einschussteilchen und ergänzt die von Renard [25] angegebene Formel um die zu $s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)}$ und $s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)}$ proportionalen Korrelationsterme zwischen longitudinaler und transversaler Polarisierung.

Wirkungsquerschnitt für kollineare Kollision (2. Formulierung)

Im folgenden wird die Dichtematrix der einlaufenden Spin-1/2-Teilchen durch sphärische Tensorkomponenten parametrisiert. Damit verbunden ist eine Neuformulierung von Gl. (2-47) für die Struktur des Wirkungsquerschnittes bei kollinearer Kollision zweier polarisierter Spin-1/2-Teilchen. Die Änderungen gegenüber (2-47) sind geringfügig. Sie bestehen vor allem in der Einführung einer neuen Notation. Der wesentliche Vorteil der geänderten Bezeichnungsweise ist, daß sich die Formeln in dieser Darstellung auf die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin verallgemeinern lassen (siehe Abschnitt 2.1.2 und Anhang B). Darüberhinaus können Symmetrie- und Näherungseigenschaften des Wirkungsquerschnittes sehr übersichtlich diskutiert werden.

Als Ausgangspunkt dient Gl. (2-19). Die Größen

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(S_x + iS_y), \quad S_z, \quad +\frac{1}{\sqrt{2}}(S_x - iS_y)$$

sind die sphärischen Komponenten

$$S_+, S_0 \text{ und } S_-$$

des Polarisationsvektors $\mathbf{S}$. Sie transformieren sich wie die Komponenten eines sphärischen Tensors erster Stufe:

$$t_{1,1} = -\frac{Q}{\sqrt{2}}(S_x + iS_y) = -\frac{Q}{\sqrt{2}}s_{\perp} e^{i\psi}, \quad (2-49a)$$

$$t_{1,0} = S_z = s_{\parallel},$$

$$t_{1,-1} = \frac{Q}{\sqrt{2}}(S_x - iS_y) = \frac{Q}{\sqrt{2}}s_{\perp} e^{-i\psi} = -t_{1,-1}^*$$

($Q = +1$ für Elektronen, $Q = -1$ für Positronen). Zusätzlich sei

$$t_{0,0} \equiv 1 \quad (2-49b)$$

ein sphärischer Tensor 0-ter Stufe. Gl. (2-45) für die Dichtematrix ρ wird damit zu

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_{0,0} + t_{1,0} & \sqrt{2} t_{1,-1} \\ -\sqrt{2} t_{1,1} & t_{0,0} - t_{1,0} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_{0,0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t_{1,-1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t_{1,1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_{0,0}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t_{1,1}^* + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t_{1,0}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t_{1,-1}^* \\ &\equiv T^{(1/2)}(0,0) t_{0,0}^* \\ &\quad + T^{(1/2)}(1,1) t_{1,1}^* + T^{(1/2)}(1,0) t_{1,0}^* + T^{(1/2)}(1,-1) t_{1,-1}^* \\ &= \sum_{J,M} T^{(1/2)}(J,M) t_{J,M}^* \quad (2-50) \end{aligned}$$

Das Verwenden der konjugiert komplexen Größen t_{JM}^* in (2-50) beeinflußt wegen

$$t_{1,1} = - t_{1,-1}^*$$

nur das Vorzeichen der Matrizen $T^{(1/2)}(1,1)$ und $T^{(1/2)}(1,-1)$ und ist eine Frage der Konvention.

Die Komponenten der Basismatrizen $T^{(1/2)}(J,M)$ bestehen im wesentlichen aus Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Sie stellen den Zusammenhang her zwischen den Tensorkomponenten $\rho_{\lambda\lambda'}$ und den sphärischen

Tensorkomponenten t_{JM} .

$$T^{(1/2)}(J, M)_{\lambda \lambda'} = \frac{(-1)^{1/2 - \lambda'}}{\sqrt{2}} C(1/2, 1/2, J; \lambda, -\lambda', M) . \quad (2-51)$$

$C(j_1, j_2, J; m_1, m_2, M)$ bezeichnet Clebsch-Gordan-Koeffizienten zur Kopplung der Drehimpulse j_1 und j_2 zum Gesamtdrehimpuls J . Unmittelbar aus der expliziten Darstellung (2-50) oder aus den Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt

$$T^{(1/2)}(J, M)_{\lambda \lambda'} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda - \lambda' \neq M . \quad (2-52)$$

Unter Benützung der Gln. (2-39), (2-50) und (2-52) läßt sich Gl. (2-28) für das Betragsquadrat des Matrixelementes umschreiben:

$$\begin{aligned} |ME|^2 &= \\ &= \sum_{J_1 M_1 J_2 M_2} t_{J_1, M_1}^* t_{J_2, M_2}^* \times \sum_{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \lambda_2'} T^{(1/2)}(J_1, M_1)_{\lambda_1 \lambda_1'} T^{(1/2)}(J_2, M_2)_{\lambda_2 \lambda_2'} \\ &\quad \times W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \\ &= \sum_{J_1 M_1 J_2 M_2} t_{J_1, M_1}^* t_{J_2, M_2}^* e^{i\Phi_3(M_1 - M_2)} R(J_1, M_1; J_2, M_2) . \end{aligned} \quad (2-53)$$

Die Basismatrizen $T^{(1/2)}(J, M)$ fassen Terme mit gleicher Φ_3 -Abhängigkeit zusammen. Die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$,

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\lambda_1 \lambda_2} T^{(1/2)}(J_1, M_1)_{\lambda_1, \lambda_1 - M_1} T^{(1/2)}(J_2, M_2)_{\lambda_2, \lambda_2 - M_2} \times V_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1 - M_1, \lambda_2 - M_2} \quad (2-54)$$

bestehen bis auf Faktoren aus den verschiedenen Kombinationen von Helizitätsamplituden aus Gl. (2-47). Z.B. ist

$$\begin{aligned} R(0,0; 0,0) &= (V_{+,+,+} + V_{-,-,-} + V_{+,-,+} + V_{-,-,+}) / 4, \\ R(1,0; 1,0) &= (V_{+,+,+} + V_{-,-,-} - V_{+,-,+} - V_{-,-,+}) / 4, \\ &\dots \\ R(1,1; 1,0) &= (-V_{+,+,-} + V_{+,-,-}) / \sqrt{8}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-55)$$

Die vollständige Liste ist in Gl. (B-54) im Anhang angegeben.

Die Schreibweise (2-53) für das Betragsquadrat des Matrixelementes hat folgende Vorteile:

1) Die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ sind unabhängig von ϕ_3 . Der Phasenfaktor, mit dem $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ zur Bildung des Wirkungsquerschnittes zu multiplizieren ist, läßt sich sofort angeben (vgl. die letzte Beziehung in (2-53)).

2) Der Zusammenhang mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten ermöglicht auf einfache Weise das Aufstellen von Symmetrierelationen zwischen den Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$. (Diese Symmetriebeziehungen bleiben auch für die Streuung von Teilchen mit höherem Spin gültig (siehe Abschnitt 2.2).)

Zur Illustration von 2) folgen einige Eigenschaften und Symmetrierelationen für die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$.

a) Wegen

$$T^{(1/2)}(J, -M)_{\lambda \lambda'} = (-1)^M T^{(1/2)}(J, M)_{\lambda' \lambda} \quad (2-56)$$

(siehe die explizite Darstellung der Matrizen $T^{(1/2)}(J, M)$ in (2-50)) und mit (2-41) erhält man

$$R(J_1, -M_1; J_2, -M_2) = (-1)^{M_1+M_2} R^*(J_1, M_1; J_2, M_2). \quad (2-57)$$

Die Funktionen $R(J_1, 0; J_2, 0)$ sind demnach reell.

b) Mit Hilfe von (2-42) kann man zeigen (vgl. (B-49)), daß für paritätsinvariante Wechselwirkungen

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = (-1)^{J_1+J_2} R^*(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (2-58)$$

gilt. In dem Fall sind die Größen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ also entweder reell (falls $J_1 + J_2$ gerade ist) oder rein imaginär (für $J_1 + J_2$ ungerade).

c) Sind sämtliche Funktionen $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$ reell, so gilt

$$\text{Im } R(J_1, M_1; J_2, M_2) = 0. \quad (2-59)$$

In niedrigster Ordnung einer zeitumkehrinvarianten Störungstheorie ist diese Voraussetzung automatisch erfüllt (siehe Anhang A.4.6). Die infolge von (2-59) verschwindenden Terme entsprechen den Summanden proportional zu δ_N in (2-47).

Ist die Wechselwirkung außerdem paritätserhaltend, so wird (2-58) mit (2-59) zu

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = (-1)^{J_1+J_2} R(J_1, M_1; J_2, M_2). \quad (2-59')$$

$R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ verschwindet daher identisch, falls $J_1 + J_2$ ungerade ist.

d) Hochenergienäherung der Helizitätsamplituden bewirkt, daß weitere R-Funktionen null werden. Nach Anhang B.4, Gl. (B-67), gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= R(1,1; 0,0) &= R(0,0; 1,1) \\
 &= R(1,1; 1,0) &= R(1,0; 1,1) \\
 &= R(1,1; 1,1) .
 \end{aligned} \tag{2-60}$$

Zusammenfassend erhält man für das Betragsquadrat des Matrixelementes den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 |ME|^2 &= R(0,0; 0,0) + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} R(1,0; 1,0) \\
 &+ s_{\parallel}^{(1)} \delta_P R(1,0; 0,0) + s_{\parallel}^{(2)} \delta_P R(0,0; 1,0) \\
 &- \sqrt{2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} \begin{bmatrix} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) & \delta_P \delta_H \operatorname{Re} R(1,1; 0,0) \\ -\sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) & \delta_N \delta_H \operatorname{Im} R(1,1; 0,0) \end{bmatrix} \\
 &- \sqrt{2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \begin{bmatrix} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) & \delta_H \operatorname{Re} R(1,1; 1,0) \\ -\sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) & \delta_P \delta_N \delta_H \operatorname{Im} R(1,1; 1,0) \end{bmatrix} \\
 &- \sqrt{2} Q^{(2)} s_{\perp}^{(2)} \begin{bmatrix} \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) & \delta_P \delta_H \operatorname{Re} R(0,0; 1,1) \\ +\sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) & \delta_N \delta_H \operatorname{Im} R(0,0; 1,1) \end{bmatrix} \\
 &- \sqrt{2} s_{\parallel}^{(1)} Q^{(2)} s_{\perp}^{(2)} \begin{bmatrix} \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) & \delta_H \operatorname{Re} R(1,0; 1,1) \\ +\sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) & \delta_P \delta_N \delta_H \operatorname{Im} R(1,0; 1,1) \end{bmatrix} \\
 &+ Q^{(1)} Q^{(2)} s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \begin{bmatrix} \cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) & \delta_H \operatorname{Re} R(1,1; 1,1) \\ +\sin(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) & \delta_P \delta_N \delta_H \operatorname{Im} R(1,1; 1,1) \\ -\cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) & \operatorname{Re} R(1,1; 1, -1) \\ +\sin(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) & \delta_P \delta_N \operatorname{Im} R(1,1; 1, -1) \end{bmatrix} .
 \end{aligned} \tag{2-61}$$

Die Signaturen δ_P , δ_N und δ_H kennzeichnen wie in (2-47) Terme, die bei Paritätserhaltung, in niedrigster Ordnung Störungstheorie und in Hochenergienäherung verschwinden: Nullsetzen von δ_P ist gleichbedeutend mit der Anwendung von (2-58); die Auswirkung der Relation (2-59) läßt sich durch $\delta_N = 0$ beschreiben; $\delta_H = 0$ ist äquivalent zu den Gln. (2-60). Da die Beziehungen (2-58) bis (2-60) sehr einprägsam

sind, kann man auf die Verwendung der Signaturen δ_P , δ_N und δ_H verzichten.

2.1.2. Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin

Die Darstellung (2-61) des Wirkungsquerschnittes für die Streuung polarisierter Spin-1/2-Teilchen läßt sich auf die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin verallgemeinern. Die entsprechenden Schritte werden angegeben. Für Beweise und eine ausführlichere Darstellung sei auf die Anhänge A und B verwiesen.

Dichtematrix massiver Teilchen mit Spin s

Ein massives Teilchen mit Spin s hat $2s + 1$ Spin-Freiheitsgrade. Die Summe bei der Entwicklung (2-4) eines Teilchenzustandes nach Helizitätsbasiszuständen läuft von $+s \dots -s$. Die Spin-Dichtematrix eines reinen Spin-Zustandes (vgl. (2-11)) hat somit $(2s + 1)^2$ komplexe Komponenten.

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha_s & \alpha_s^* & & & \alpha_s & \alpha_s^* \\ & \vdots & & & & \\ & & & & & \\ \alpha_{-s} & \alpha_s^* & & & \alpha_{-s} & \alpha_s^* \end{pmatrix}. \quad (2-62)$$

Nicht alle Komponenten sind unabhängig voneinander. Durch die Hermitezitätsbedingung (2-15) und die Normierung (2-16) der Spur auf 1 wird die Zahl der unabhängigen Parameter auf $(2s + 1)^2 - 1$ reelle Größen eingeschränkt. Für Spin-1/2 erhält man 3 Parameter und kann Vektorkomponenten zur Parametrisierung wählen. Die Dichtematrix für Teilchen mit höherem Spin beschreibt man üblicherweise durch sphärische Tensorkomponenten

$$t_{JM} \quad \text{mit } J \leq 2s \text{ und } -J \leq M \leq +J .$$

t_{00} wird identisch 1 gesetzt und gewährleistet die Normierung $\text{Tr } \rho = 1$.
Wegen

$$t_{J, -M} = (-1)^M t_{J,M}^* \quad (2-63)$$

(siehe (B-21)) hat ein sphärischer Tensor J-ter Stufe $2J + 1$ unabhängige Parameter. Da J von 1 (t_{00} ist festgelegt) bis $2s$ läuft, erhält man die richtige Anzahl freier Parameter, ohne zusätzlich Nebenbedingungen einzuführen. Ein unpolarisierter Zustand wird durch $t_{JM} = 0$ für alle $J \geq 1$, M beliebig, beschrieben (vgl. Anhang B.1, Gl. (B-15c) mit (B-5) und (B-19)).

Verwendung von sphärischen Tensorkomponenten führt auf eine zu (2-50) analoge Entwicklung nach Basismatrizen $T^{(s)}(J, M)$.

$$\rho = \sum_{J,M} T^{(s)}(J, M) t_{J,M}^* . \quad (2-64)$$

Nach Anhang B, Gl. (B-15), ist

$$T^{(s)}(J, M)_{\lambda \lambda'} = \frac{(-1)^{s-\lambda'}}{(2s+1)^{1/2}} C(s, s, J; \lambda, -\lambda', M) \quad (2-65)$$

mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten $C(s, s, J; \mu, \mu', M)$ für die Kopplung zweier Drehimpulse s zum Gesamtdrehimpuls J . Die explizite Gestalt dieser Basismatrizen ist für den Fall $s = 1/2$ in Gl. (2-50) angegeben. Der Fall $s = 1$ ist in Anhang B, Gl. (B-24a,b,c) behandelt. Nur Matrixelemente mit $\lambda' = \lambda - M$ sind von Null verschieden (vgl. (B-29)). Zwischen $T^{(s)}(J, M)$ und $T^{(s)}(J, -M)$ besteht die Beziehung

$$T^{(s)}(J, -M) = (-1)^M T^{(s)T}(J, M) \quad (2-66a)$$

(siehe (B-22a)). $T^{(s)T}$ ist die zu $T^{(s)}$ transponierte Matrix. Ferner gilt die Gleichung

$$T^{(s)}(J, M)_{-\lambda, -\lambda'} = (-1)^J T^{(s)}(J, -M)_{\lambda\lambda'} \quad (2-66b)$$

(siehe (B-22b)). Die sphärischen Tensorkomponenten t_{JM} erhält man nach (B-15c) aus den Elementen $\rho_{\lambda\lambda'}$ der Dichtematrix mit Hilfe der Formel

$$t_{JM}^* = (2s+1) \sum_{\lambda\lambda'} T^{(s)}(J, M)_{\lambda\lambda'} \rho_{\lambda\lambda'} \quad (2-67)$$

Masselose Teilchen mit Spin s

Masselose Teilchen besitzen, falls ihr gespiegelter Zustand existiert und $s > 0$ ist, 2 Helizitätszustände mit $\lambda = \pm s$. Die Spin-Dichtematrix ist also eine 2×2 -Matrix, die man auf die gleiche Art wie die Dichtematrix eines Spin-1/2-Teilchens parametrisieren kann (Index $\pm \equiv \pm s$):

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_{\parallel} & s_{\perp} e^{-i\psi} \\ s_{\perp} e^{+i\psi} & 1-s_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2-68)$$

Anders und Jachmann [16] geben die Dichtematrix für Photonen ($s=1$) in dieser Form an. Setzt man $\psi = 2\alpha$, so hat α die folgende Bedeutung: $\alpha + \pi/2$ ist der Drehwinkel der linearen Polarisation gegenüber der x-Achse, gezählt in Richtung auf die positive y-Achse (vgl. Abb. 2-4).

Um eine Fallunterscheidung zwischen massiven und masselosen Teilchen weitgehend überflüssig zu machen, kann man in die Dichtematrix (2-67) Elemente $\rho_{\lambda\lambda'}$ mit $\lambda, \lambda' \neq \pm s$ einfügen und gleich Null setzen. Für $s=1$ erhält man eine Matrix der Form

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{++} & 0 & \rho_{+-} \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho_{-+} & 0 & \rho_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_{\parallel} & 0 & s_{\perp} e^{-i\psi} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{\perp} e^{+i\psi} & 0 & 1-s_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2-69)$$

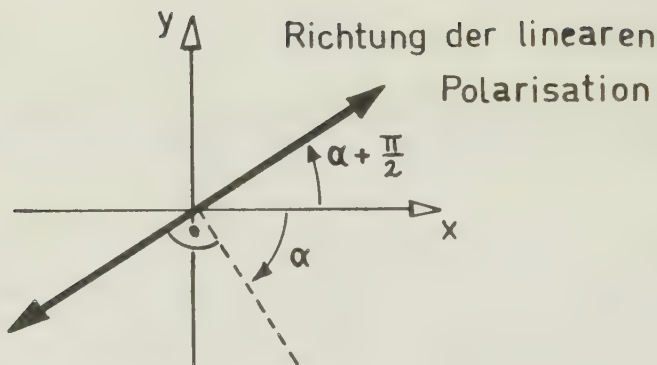


Abb. 2 - 4 : Definition des Winkels α . α legt die Richtung der linearen Polarisation von Photonen fest.

Gl. (2-69) in der auf beliebigen Spin s erweiterten Form (= Einfügung zusätzlicher Nullen) entspricht der Dichtematrix eines massiven Teilchens mit Spin s , das sich ausschließlich in Zuständen mit der Helizität $\lambda = \pm s$ aufhält. Mittels (2-67) lassen sich die Tensorkomponenten t_{JM} berechnen. Nur die Komponenten $t_{2s,2s}$ und $t_{J,0}$ verschwinden nicht:

$$\begin{aligned}
 t_{2s,2s} &= (2s+1)^{1/2} (-1)^{2s} \rho_{s,-s}^*, \\
 t_{J,0} &= C(J) \times \begin{cases} 1, & \text{für } J \text{ gerade,} \\ s_{\parallel}, & \text{für } J \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2-70)
 \end{aligned}$$

mit

$$C(J) \equiv (2s+1)^{1/2} C(s, s, J; s, -s, 0).$$

Die Tensoren $t_{J,0}$ sind entweder unabhängig von den Polarisationsparametern (für J gerade) oder sie sind proportional zu $s_{\parallel}$ (für J ungerade). Schreibt man die Dichtematrix ρ in der Form

$$\begin{aligned} \rho = & \sum_{J \in A} t_{J,0}^* T^{(s)}(J,0) + \sum_{J \in B} t_{J,0}^* T^{(s)}(J,0) \\ & + t_{2s,2s}^* T^{(s)}(2s,2s) + t_{2s,-2s}^* T^{(s)}(2s,-2s), \end{aligned} \quad (2-71)$$

so tragen die Summanden $T^{(s)}(J,0)$ mit $J \in A$ zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt, diejenigen mit $J \in B$ zum polarisierten Wirkungsquerschnitt bei. Nach (2-70) besteht die Menge A aus geraden und die Menge B aus ungeraden Zahlen:

$$\begin{aligned} A &= \{ 0, 2, \dots, 2n \}, \quad n \leq s, \\ B &= \{ 1, 3, \dots, 2m+1 \}, \quad 2m \leq s-1. \end{aligned} \quad (2-72)$$

Das Auftreten der Summen

$$\sum_{J \in A} t_{J,0}^* T^{(s)}(J,0) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2-73)$$

und

$$\sum_{J \in B} t_{J,0}^* T^{(s)}(J,0) \sim s_{\parallel} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \quad (2-74)$$

mit gleichem Polarisationsparameter ist notwendig: die Matrizen $T^{(s)}(J,0)$ enthalten nichtverschwindende Diagonal-Matrixelemente an Stellen, an denen die Elemente der Dichtematrix eines masselosen Teilchens Null sind (vgl. (2-69) sowie die explizite Darstellung der Matrizen $T^{(1)}(J,M)$ für Spin 1 in (B-24)). Die Linearkombinationen (2-73) und (2-74) eliminieren diese Matrixelemente.

Wirkungsquerschnitt für kollineare Kollision

Die in Abschnitt 2.1.1 exemplarisch für Bhabha-Streuung abgeleiteten Gleichungen für die Gestalt des Wirkungsquerschnittes übertragen sich sinngemäß auf die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin. Die Änderungen bestehen im wesentlichen in der Anpassung der Wertebereiche der Helizitätsindizes an die Spins der kollidierenden Teilchen. Die Behandlung masseloser Teilchen erfordert einige zusätzliche Vorkehrungen. Die Gleichungen dieses Abschnittes fassen eine Reihe von Resultaten aus den Anhängen A und B zusammen. Beweise findet man an den angegebenen Stellen in den Anhängen.

Das Betragsquadrat des Matrixelementes ME für die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin ist durch (2-28) gegeben, wobei für die Dichtematrizen je nach Masse der Teilchen (2-62) oder (2-69) einzusetzen sind:

$$|ME|^2 \equiv \sum_{\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \lambda_2'} \rho_{\lambda_1 \lambda_1'} \rho_{\lambda_2 \lambda_2'} W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \quad (2-75)$$

mit

$$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \equiv \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1' \lambda_2' \rangle^* \quad (2-76)$$

Die Summationsindizes λ_i und λ_i' durchlaufen den Wertebereich $-s_i, \dots, +s_i$. (Es werden hier Streuereignisse mit 2 Teilchen im Endzustand betrachtet. Mit im wesentlichen denselben Formeln lassen sich inklusive Prozesse beschreiben. Man hat lediglich über die Helizitäten $\lambda_5, \lambda_6, \dots$ der weiteren Teilchen im Endzustand zu summieren und eine Phasenraumintegration durchzuführen (vgl. Anhang B, speziell die Gln. (B-42) und (B-43)).)

Mit verändertem Wertebereich der Helizitätsindizes bleiben die folgenden Beziehungen erhalten:

a) Gl. (2-39) für die Φ_3 -Abhängigkeit der Funktion $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$:

$$W(\Phi_3, \Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \quad (2-77)$$

$$= e^{i\Phi_3 [(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1' - \lambda_2')]} V(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$$

(siehe Anhang A, Gl. (A-83));

b) die Symmetriebeziehung (2-42),

$$V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_1'} (-1)^{\lambda_2 - \lambda_2'} V_{-\lambda_1, -\lambda_2; -\lambda_1', -\lambda_2'} \quad (2-78)$$

falls die Parität eine Erhaltungsgröße ist (siehe Anhang B, Gl. (B-49'));

c) die Gleichung

$$V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} = V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}^* \quad (2-79)$$

falls ein Streuprozess in niedrigster Ordnung einer zeitumkehrinvarianten Störungstheorie betrachtet wird (vgl. Anhang B, Gl. (B-50')).

Einsetzen der Darstellungen (2-64) bzw. (2-71) für die Dichtematrizen in die Gl. (2-75) für $|ME|^2$ führt zu

$$|ME|^2 = \sum_{J_1 M_1 J_2 M_2} t_{J_1, M_1}^* t_{J_2, M_2}^* e^{i\Phi_3(M_1 - M_2)} R(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (2-80)$$

mit

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\lambda_1 \lambda_2} T^{(s_1)}(J_1, M_1)_{\lambda_1, \lambda_1 - M_1} T^{(s_2)}(J_2, M_2)_{\lambda_2, \lambda_2 - M_2} \times V_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1 - M_1, \lambda_2 - M_2} \quad (2-81)$$

Es ist zu beachten, daß die Helizitätszustände mit $\lambda \neq \pm s_i$ nicht existieren, falls Teilchen i masselos ist. In dem Fall werden erst Linearkombinationen der Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ sinnvoll (vgl. die Summen über die Mengen A und B in (2-71)).

Man kann zeigen, daß die Beziehungen (2-58) bis (2-60) für die Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin gültig bleiben. Mit verändertem Wertebereich der Parameter J und M gilt:

a) Aus $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = V^*_{\lambda'_1 \lambda'_2; \lambda_1 \lambda_2}$ und (2-66a) wird

$$R(J_1, -M_1; J_2, -M_2) = (-1)^{M_1 + M_2} R^*(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (2-82)$$

(identisch mit (B-46));

b) für paritätsinvariante Wechselwirkungen folgt aus (2-78) und (2-66b)

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = (-1)^{J_1 + J_2} R^*(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (2-83)$$

(identisch mit (B-49));

c) aus (2-79) erhält man in niedrigster Ordnung einer zeitumkehrinvarianten Störungstheorie die Gleichung

$$\text{Im } R(J_1, M_1; J_2, M_2) = 0 \quad (2-84)$$

(identisch mit (B-50)); ist zudem die Parität erhalten, so folgt aus (2-83) und (2-84) die Beziehung

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = (-1)^{J_1 + J_2} R(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (2-84')$$

(identisch mit (B-50')).

Zu den Gln. (2-82) bis (2-84) ist eine Anmerkung erforderlich für den Fall, daß eines der einlaufenden Teilchen masselos ist. Die Gleichungen gelten dann erst nach Bildung von Linearkombinationen der Form (2-73) und (2-74). Ist beispielsweise Teilchen 1 massiv und Teilchen 2 masselos, so erhält man aus (2-82) und (2-83) u.a. die Gleichungen

$$\sum_{J_2 \in A_2} t_{J_2,0}^* R(J_1, -M_1; J_2, 0) \quad (2-82')$$

$$= (-1)^{M_1} \left[\sum_{J_2 \in A_2} t_{J_2,0}^* R(J_1, M_1; J_2, 0) \right]^*$$

und

$$\sum_{J_2 \in A_2} t_{J_2,0}^* R(J_1, M_1; J_2, 0) \quad (2-83')$$

$$= (-1)^{J_1} \left[\sum_{J_2 \in A_2} t_{J_2,0}^* R(J_1, M_1; J_2, 0) \right]^* .$$

Daß man die Beziehungen (2-82) bis (2-84) dabei gliedweise anwenden kann, obwohl die Einzelterme für masselose Teilchen nicht existieren, läßt sich wie folgt begründen: Man gebe sich eine Linearkombination vom Typ (2-73) bzw. (2-74) für massive Teilchen vor. In diesem Fall existiert jeder Summand der Linearkombination und die Gln. (2-82) bis (2-84) lassen sich gliedweise anwenden. Man beachte nun, daß 1) in diese Linearkombination nur Helizitätsamplituden eingehen, die auch für masselose Teilchen existieren (nach (2-69) bis (2-74) entspricht die Dichtematrix eines masselosen Teilchens der Dichtematrix eines massiven Teilchens in den Zuständen mit Helizität $\pm s$), daß 2) bei der gliedweisen Anwendung von (2-82) bis (2-84) keine Helizitätsamplituden entstehen, die für Photonen nicht existieren (die (2-82) bis (2-84) zugrundeliegenden Symmetriebeziehungen der Helizitätsamplituden verknüpfen nur solche Amplituden miteinander, die durch Vorzeichenumkehr der Helizitätsindizes auseinander hervorgehen) und daß 3) die in (2-82) bis (2-84) eingehenden Symmetriebeziehung der Helizitätsamplituden unabhängig von der Masse sind. Daher können die Symmetriebeziehungen für Linearkombinationen vom Typ (2-73) und (2-74) vom Fall massiver Teilchen auf den Fall masseloser Teilchen ausgedehnt werden.

Zum Abschluß von Abschnitt 2.1.2 wird Gl. (2-80) für $|ME|^2$ in eine Form gebracht, der die verschiedenen Polarisationsasymmetrien und ihre Azimutwinkelverteilung direkt zu entnehmen sind. Dazu dividieren wir $|ME|^2$ durch das Betragsquadrat $|ME|_{\text{unpol}}^2$ des Matrixelementes für die Streuung unpolarisierter Teilchen. Die entstehende Größe wird mit $|ME|_{\text{Norm}}^2$ bezeichnet. Sie hat die Gestalt

$$|ME|_{\text{Norm}}^2 \equiv \frac{|ME|^2}{|ME|_{\text{unpol}}^2} = 1 + \text{Pol.asymmetrien} .$$

$|ME|_{\text{unpol}}^2$ erhält man aus (2-80) durch Einsetzen der sphärischen Tensoren t_{JM} für unpolarisierte Teilchen. Ein massives unpolarisiertes Teilchen wird durch $t_{00} = 1$ beschrieben. Alle anderen Tensorkomponenten verschwinden (vgl. die Bemerkung im Anschluß an (2-63)). Für ein masseloses Teilchen sind nur die Komponenten $t_{J,0}$ zu $J \in A$ ungleich Null (siehe die Gln. (2-70) bis (2-72)). Um eine Fallunterscheidung zwischen massiven und masselosen Teilchen in der Endformel zu umgehen, werden auch für massive Teilchen Indexmengen A und B definiert:

$$\begin{aligned} A &\equiv \{ 0 \} , \\ B &\equiv \{ 1, 2, \dots, 2s \} . \end{aligned} \quad (2-85)$$

(Für masselose Teilchen gilt nach wie vor (2-72).) Die Bedeutung der Indexmengen A und B läßt sich wie folgt zusammenfassen:

- Die reellen Komponenten $t_{J,0}$, $J \in A$, sind die einzigen nichtverschwindenden sphärischen Tensorkomponenten für unpolarisierte Teilchen.
- Die ebenfalls reellen Komponenten $t_{J,0}$, $J \in B$, setzen sich aus Diagonalelementen der Dichtematrix zusammen und beschreiben polarisierte Teilchen.

Damit erhält man aus (2-80)

$$|ME|_{\text{unpol}}^2 = \sum_{J_1 \in A_1} \sum_{J_2 \in A_2} t_{J_1 0} t_{J_2 0} R(J_1, 0; J_2, 0) . \quad (2-86)$$

Mit Hilfe von (2-86) kann man normierte R-Funktionen definieren.

$$\hat{R}(J_1, M_1; J_2, M_2) \equiv \frac{R(J_1, M_1; J_2, M_2)}{|ME|_{\text{unpol}}^2} \quad (2-87)$$

(Die Eigenschaften (2-82) bis (2-84) werden durch die Normierung nicht beeinflusst.) Spaltet man außerdem t_{JM} gemäß

$$t_{JM} \equiv s_{JM} e^{i\psi_{JM}} \quad \text{für } M \geq 0 \quad (2-88)$$

(mit $\psi_{J,0} = 0$ wegen (2-63)) in Betrag und Phase auf und benützt die Relationen (2-63) und (2-82) für konjugiert komplexe R-Funktionen, so erhält man aus (2-80)

$$\begin{aligned} |ME|_{\text{Norm}}^2 &= 1 + \sum_{J_1 \in A_1} \sum_{J_2 \in B_2} s_{J_1,0} s_{J_2,0} \hat{R}(J_1,0; J_2,0) \\ &+ \sum_{J_1 \in B_1} \sum_{J_2 \in A_2} s_{J_1,0} s_{J_2,0} \hat{R}(J_1,0; J_2,0) \\ &+ \sum_{J_1 \in B_1} \sum_{J_2 \in B_2} s_{J_1,0} s_{J_2,0} \hat{R}(J_1,0; J_2,0) \\ &+ 2 \sum_{J_1 \in A_1 \cup B_1} s_{J_1,0} \sum_{\substack{J_2 > 0 \\ M_2 > 0}} s_{J_2, M_2} \text{Re} [e^{-i(\psi_{J_2, M_2} + \Phi_3 M_2)} \hat{R}(J_1,0; J_2, M_2)] \\ &+ 2 \sum_{J_2 \in A_2 \cup B_2} s_{J_2,0} \sum_{\substack{J_1 > 0 \\ M_1 > 0}} s_{J_1, M_1} \text{Re} [e^{-i(\psi_{J_1, M_1} - \Phi_3 M_2)} \hat{R}(J_1, M_1; J_2,0)] \\ &+ 2 \sum_{\substack{J_1 > 0, M_1 > 0 \\ J_2 > 0, M_2 > 0}} s_{J_1, M_1} s_{J_2, M_2} \\ &\quad \times \text{Re} \left[e^{-i(\psi_{J_1, M_1} + \psi_{J_2, M_2} - \Phi_3 (M_1 - M_2))} \hat{R}(J_1, M_1; J_2, M_2) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{M_2} e^{-i(\psi_{J_1, M_1} - \psi_{J_2, M_2} - \Phi_3 (M_1 + M_2))} \hat{R}(J_1, M_1; J_2, -M_2) \right] \end{aligned} \quad (2-89)$$

(2-89) gibt die verschiedenen Spin-Korrelationsterme und deren Azimutwinkelabhängigkeit explizit an. Die einzelnen Terme beschreiben folgende Polarisationsasymmetrien (vgl. (2-85) ff. zur Erläuterung der Indexmengen A und B):

<u>Term</u>	<u>Teilchen 1</u>	<u>Teilchen 2</u>
1 :	unpolarisiert,	unpolarisiert;
2 :	unpolarisiert,	$s_{J_2 0} \neq 0$;
3 :	$s_{J_1 0} \neq 0$,	unpolarisiert;
4 :	$s_{J_1 0} \neq 0$,	$s_{J_2 0} \neq 0$;
5 A_1 :	unpolarisiert,	$s_{J_2 M_2} \neq 0$, $M_2 > 0$;
5 B_1 :	$s_{J_1 0} \neq 0$,	$s_{J_2 M_2} \neq 0$, $M_2 > 0$;
6 A_2 :	$s_{J_1 M_1} \neq 0$, $M_1 > 0$,	unpolarisiert;
6 B_2 :	$s_{J_1 M_1} \neq 0$, $M_1 > 0$,	$s_{J_2 0} \neq 0$;
7 :	$s_{J_1 M_1} \neq 0$, $M_1 > 0$,	$s_{J_2 M_2} \neq 0$, $M_2 > 0$.

Für e-e-Streuung nimmt dieses Schema die folgende Gestalt an (vgl. (2-49a) zur Bedeutung der sphärischen Tensorkomponenten):

<u>Term</u>	<u>Teilchen 1</u>	<u>Teilchen 2</u>
1 :	unpolarisiert,	unpolarisiert;
2 :	unpolarisiert,	longitudinal;
3 :	longitudinal,	unpolarisiert;
4 :	longitudinal,	longitudinal;
5 A_1 :	unpolarisiert,	transversal;
5 B_1 :	longitudinal,	transversal;
6 A_2 :	transversal,	unpolarisiert;
6 B_2 :	transversal,	longitudinal;
7 :	transversal,	transversal.

Ersetzt man in dieser Tabelle für Teilchen 2 "longitudinal" durch "zirkular" und "transversal" durch "linear", so erhält man die Polarisationsasymmetrien für die Streuung eines Elektrons an einem Photon. (In Anhang B sind die beiden Spezialfälle von (2-89) explizit angegeben: Gl. (B-52) beschreibt die Streuung zweier Spin-1/2-Teilchen, Gl. (B-56) die Streuung eines Spin-1/2-Teilchens an einem Photon.)

Im allgemeinen Fall liefern die Terme mit $M_i \neq 0$ in (2-89) Sinus- und Cosinus-Funktionen:

$$\operatorname{Re} [e^{i\psi} R] = \cos\psi \operatorname{Re} R - \sin\psi \operatorname{Im} R . \quad (2-90)$$

Falls die Wechselwirkung paritätserhaltend ist, sind die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ nach (2-83) in jeder Ordnung der Störungstheorie entweder reell oder rein imaginär. Einer der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von (2-90) verschwindet.

Auch die Auswirkung der Beziehung (2-84) läßt sich mit Hilfe von (2-90) leicht übersehen: Für zeitumkehrinvariante Wechselwirkungen verschwinden in niedrigster störungstheoretischer Ordnung sämtliche Terme proportional zu $\operatorname{Im} R$.

2.2. Polarisationsmessung von gestreuten Teilchen

Gl. (2-9) drückt den Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Spin-1/2-Teilchen unter Bildung zweier (anderer) Spin-1/2-Teilchen

durch Helizitätsamplituden aus. Die angegebene Formel beschreibt die Streuung aus einem genau festgelegten Anfangszustand in einen ebenso genau bestimmten Endzustand. Der Ausdruck besteht aus einer Summe über Produkte von Helizitätsamplituden der Form

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle \lambda_3' \lambda_4' | S | \lambda_1' \lambda_2' \rangle^* . \quad (2-91)$$

Die einzelnen Summanden sind mit den Produkten $\alpha_{\lambda_i} \alpha_{\lambda_i'}^*$ der Entwicklungskoeffizienten α_{λ_i} der Anfangs- und Endzustände gewichtet. Wählt man nun für alle Anfangs- und Endzustände reine Helizitätszustände mit Helizität Λ_i , so werden die α_{λ_i} zu

$$\alpha_{\lambda_i} = \delta_{\lambda_i \Lambda_i} . \quad (2-92)$$

Von der Summe bleibt nur ein Term übrig:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} \sim | \langle \Lambda_3 \Lambda_4 | S | \Lambda_1 \Lambda_2 \rangle |^2 . \quad (2-92)$$

Durch die Wahl verschiedener Anfangs- und Endzustände kann man der Reihe nach Teilsummen aus dem vollständigen Ausdruck (2-9) bestimmen.

Diese Isolierung bestimmter Terme kann man als Filterung auffassen: Man erzeugt vor der Wechselwirkungszone durch Polarisationsfilter einen bestimmten Polarisationszustand; Nach der Wechselwirkung werden die Teilchen erst registriert, nachdem sie weitere Polarisationsfilter durchlaufen haben, die auf den gewünschten Endzustand projizieren. Für Photonen im sichtbaren Bereich existieren solche Polarisationsfilter. Man kann experimentell auf die beschriebene Weise vorgehen.

Leider läßt sich das Verfahren in dieser Einfachheit nicht auf hochenergetische Elektronen (Positronen) anwenden. Zwar kann man polarisierte hochenergetische Elektronen mit hohem Polarisationsgrad in Beschleunigerlaboratorien erzeugen. Z.B. erhält man in Speicherringen trans-

versal polarisierte Elektronen und Positronen mit einem maximalen Polarisationsgrad von 92.4% [4]. Es ist jedoch kein Verfahren bekannt, das es erlauben würde, Elektronen mit der Wahrscheinlichkeit 1 auf einen definierten Polarisationszustand zu projizieren [19]. Mit anderen Worten, es existiert kein Filter, der in der Lage ist, einen bestimmten Polarisationszustand vollständig zu absorbieren und einen dazu orthogonalen ungeschwächt passieren zu lassen. Ein zum Stern-Gerlach-Experiment analoges Verfahren beispielsweise ist mit geladenen Teilchen infolge der Unschärfebeziehung nicht durchführbar (vgl. [19]).

Man ist auf weniger effektive Methoden angewiesen: Man streut die zu untersuchenden Teilchen an einem Target und untersucht die Streuprodukte. Die in Abschnitt 2.1 besprochene Polarisationsabhängigkeit oder Polarisationsasymmetrie bestimmter Wirkungsquerschnitte kann so zur Polarisationsmessung benutzt werden. Da in der Regel die Streuwahrscheinlichkeit sehr viel kleiner als 1 ist und auch die Polarisationsasymmetrien meist den Wert 1 nicht erreichen, kann man selbst bei vollständig polarisierten Zuständen nur anhand einer größeren Zahl von Teilchen den Polarisationszustand bestimmen. In Abschnitt 2.2.1 wird ein Ausdruck für die geringste erforderliche Teilchenzahl N_0 angegeben, um eine vorgegebene Meßgenauigkeit zu erreichen. N_0 dient in den späteren Kapiteln zur Beurteilung der Effektivität eines Polarimeters: je kleiner N_0 ist, desto effektiver ist der Meßprozess.

Für die Aussagen von Abschnitt 2.2.1 über die Effektivität einer Polarisationsmessung ist es unerheblich, ob die Teilchen, deren Polarisation gemessen werden soll, aus dem Teilchenstrahl eines Beschleunigers stammen, oder ob es sich um Elektronen im Endzustand eines Streuprozesses handelt. In Abschnitt 2.2.2 dagegen wird auf die Besonderheiten bei der Messung der Endzustandspolarisation eingegangen. Dabei ist folgendes zu beachten:

- 1) Der Analyseprozess zur Messung der Polarisation eines Teilchens im Endzustand muß gemeinsam mit dem Streuprozess betrachtet werden, bei dem dieses Teilchen entsteht, d.h. es ist eine Kaskade von Streuprozessen zu untersuchen.

- 2) Zur vollständigen Bestimmung eines polarisierten Wirkungsquerschnittes ist es notwendig, Spin-Korrelationen zwischen den auslaufenden

Teilchen festzustellen, d.h. man muß gleichzeitig Polarisationsmessungen an mehreren Teilchen durchführen. Genauere Begründungen hierfür findet man in Abschnitt 2.2.2.

2.2.1. Effektivität und Erfolgsbedingungen einer Polarisationsmessung (Qualitätsparameter N_Q)

Ein Teilchenbündel aus N'_0 Spin-1/2-Teilchen bewege sich längs der positiven z-Achse. Seine Konstituenten kann man mit den Teilchen 1 aus dem vorangegangenen Abschnitt 2.1 identifizieren. Das Bündel wird an den Target-Teilchen (Teilchen 2) gestreut. Der Einfachheit halber sei zunächst vorausgesetzt, daß die Target-Teilchen ebenfalls Spin 1/2 haben, daß sie longitudinal polarisiert sind ($s_{\parallel}^{(2)} \neq 0$, $s_{\perp}^{(2)} = 0$) und daß die Wechselwirkung paritätserhaltend ist. Integriert man ferner über den Azimutwinkel ϕ_3 des Streuteilchens 3, so vereinfacht sich der allgemeine Ausdruck (2-47) bzw. (2-61) für den Wirkungsquerschnitt dieses Streuprozesses zu

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta_3}(s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) &= \frac{d\sigma_0}{d\theta_3} \frac{|ME|^2}{|ME|_{\text{unpol}}^2} \\ &= \frac{d\sigma_0}{d\theta_3} \{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL} \} . \end{aligned} \quad (2-94)$$

Insbesondere verschwinden infolge der Paritätserhaltung bzw. wegen der Azimutwinkel-Integration sämtliche Polarisationsasymmetrien, die von der Polarisation nur eines der beiden Teilchen abhängen, in allen Ordnungen der Störungstheorie.

Von den N'_0 Teilchen wird ein zum Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ proportionaler Teil gestreut.

$$N(s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) = N_o' T \frac{d\sigma}{d\Theta_3}(s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) . \quad (2-95)$$

Das Produkt

$$W(s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) \equiv T \frac{d\sigma}{d\Theta_3}(s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) \quad (2-96)$$

ist die Streuwahrscheinlichkeit. Der Proportionalitätsfaktor T wird Targetfaktor genannt. Er hängt ab von der Beschaffenheit des Targets. Für ein ruhendes Target ist $T = n_2 a$, wobei n_2 die Dichte der Target-Teilchen und a die Länge des Targets in Flugrichtung bezeichnet. T gibt die Anzahl der Target-Teilchen pro Flächeneinheit an. Für bewegte Targets hat man zusätzlich die Relativgeschwindigkeit zwischen den Strahlteilchen 1 und den Target-Teilchen 2 zu berücksichtigen (vgl. die Streuung an Photonen in Abschnitt 6.3.1).

Die Zahl $N(s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)})$ hängt wegen der Polarisationsasymmetrie in (2-94) vom Polarisationszustand beider Teilchen ab. Ändert man das Vorzeichen von $s_{\parallel}^{(2)}$, so ändert sich das Vorzeichen der Polarisationsasymmetrie und man erhält eine andere Zählrate. Die erste Einstellung der Target-Polarisation mit $s_{\parallel}^{(2)} = s^{(2)}$ wird als Anordnung "A", die zweite mit $s_{\parallel}^{(2)} = -s^{(2)}$ als Anordnung "B" bezeichnet. In Anordnung "A" werden

$$N_A = N_o' T \frac{d\sigma_o}{d\Theta_3} \{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s^{(2)} A_{LL} \} , \quad (2-97)$$

in Anordnung "B"

$$N_B = N_o' T \frac{d\sigma_o}{d\Theta_3} \{ 1 - s_{\parallel}^{(1)} s^{(2)} A_{LL} \} \quad (2-98)$$

gestreute Teilchen registriert. Die Polarisationsasymmetrie schlägt sich in einer meßbaren Asymmetrie A_m ,

$$A_m \equiv \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B} = s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}, \quad (2-99)$$

der Zählrate nieder. Aus ihr läßt sich bei bekanntem Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(2)}$ und bekanntem Asymmetriekoeffizienten A_{LL} der gesuchte Polarisationsparameter $s_{\parallel}^{(1)}$ entnehmen. Die Größe $s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}$ wird üblicherweise als Analysierstärke ("analyzing power") der Meßapparatur bezeichnet.

Das Entscheidende und Typische an dem eben beschriebenen Vorgehen ist der Vorzeichenwechsel der Polarisationsasymmetrie $s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}$ beim Übergang von Anordnung "A" zu Anordnung "B". Verwendet man z.B. ein transversal polarisiertes Target ($s_{\parallel}^{(2)} = 0$, $s_{\perp}^{(2)} \neq 0$) und integriert nicht über den Azimutwinkel ϕ_3 , dann wird aus dem Wirkungsquerschnitt (2-47) bzw. (2-61) (wieder unter der Voraussetzung von P-Invarianz und unter der zusätzlichen Annahme, daß der Wirkungsquerschnitt in Hochenergienäherung angegeben werden kann)

$$\frac{d\sigma}{d\phi_3} = \frac{d\sigma_0}{d\phi_3} \left\{ 1 + s_{\perp}^{(1)} \cos(2\phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) s_{\perp}^{(2)} A_{TT} \right\}. \quad (2-100)$$

Bezeichnet man mit "A" eine Zählratenbestimmung in einem Raumwinkelbereich um den Azimutwinkel $\phi_3 = \phi_A$ und als Messung "B" eine Zählratenbestimmung in einem gleich großen Raumwinkelbereich um den Azimutwinkel $\phi_3 = \phi_A + \pi/2$, so ändert sich auch hier das Vorzeichen der Polarisationsasymmetrie beim Übergang von "A" nach "B".

Da die genaue Form der Polarisationsasymmetrie für das Folgende nicht wichtig ist, wird die Bezeichungsweise verallgemeinert. Die Zählrate in Anordnung "A" sei durch

$$N_A = N'_0 \sigma_0 T \{ 1 + s^{(1)} P_A \} , \quad (2-101)$$

diejenige in Anordnung "B" durch

$$N_B = N'_0 \sigma_0 T \{ 1 + s^{(1)} P_B \} \quad (2-102)$$

gegeben. Es soll gelten

$$P_B = - P_A , \quad (2-103)$$

wobei P_A die Analysierstärke der Meßvorrichtung ist. Ein Vergleich mit den oben angegebenen Beispielen zeigt, daß der Polarisationsparameter $s^{(1)}$ der longitudinalen Polarisation $s_{\parallel}^{(1)}$ bzw. dem Ausdruck $|s_{\perp}^{(1)} \cos(2\phi_A - \psi^{(1)} + \psi^{(2)})|$ entspricht. P_A besteht im ersten Beispiel aus dem Ausdruck $s^{(2)} A_{LL}$ und im zweiten Beispiel aus $s_{\perp}^{(2)} A_{TT} \cos(2\phi_A - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) / |\cos(2\phi_A - \psi^{(1)} + \psi^{(2)})|$.

In den betrachteten Beispielen ist der Polarisationsgrad des Targets als Faktor in der Analysierstärke P_A eingeschlossen. Es gibt jedoch auch Analyseprozesse, in denen die Analysierstärke unabhängig von der Polarisation des Targets ist. Z.B. enthält der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an Kernen (Mott-Streuung, vgl. Abschnitt 4.3.1) eine Einteilchen-Polarisationsasymmetrie: Die transversale Polarisation der Elektronen macht sich in der Streuung an unpolarisierten Target-Kernen in der Azimutwinkelverteilung bemerkbar, was ein Strahlungskorrekturereffekt ist. Aus diesem Grund wurde darauf verzichtet, in den Formeln (2-101) und (2-102) den Polarisationsgrad des Targets explizit anzugeben.

Mit (2-101) und (2-102) erhält man für die Zählratenasymmetrie A_m den Ausdruck

$$A_m \equiv \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B} = s^{(1)} P_A . \quad (2-104)$$

Aus der Meßgröße A_m kann man den Polarisationsgrad $s^{(1)}$ ermitteln. A_m selbst wird aus der Anzahl N_A und N_B der registrierten Streueignissen errechnet. Die Zählraten N_A und N_B unterliegen statistischen Schwankungen ΔN_A und ΔN_B , gegeben durch

$$\Delta N_A = \sqrt{N_A}, \quad \Delta N_B = \sqrt{N_B}. \quad (2-105)$$

Die Genauigkeit $\Delta s^{(1)}$, mit der sich $s^{(1)}$ bestimmen läßt, ist durch ΔN_A und ΔN_B beschränkt. Wenn man von systematischen Fehlern absieht, erhält man für den Fehler ΔA_m unter Verwendung der Gaußschen Formel für die Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta A_m)^2 = \left(\frac{\partial A_m}{\partial N_A} \right)^2 (\Delta N_A)^2 + \left(\frac{\partial A_m}{\partial N_B} \right)^2 (\Delta N_B)^2. \quad (2-106)$$

Mit (2-101) und (2-102) wird daraus

$$(\Delta A_m)^2 = \frac{1 - A_m^2}{N_A + N_B} = \frac{1 - A_m^2}{2 N_o' T \sigma_o}. \quad (2-107)$$

Zusammen mit der zweiten Gleichung in (2-104) ergibt sich die Beziehung

$$(\Delta s^{(1)})^2 = \frac{(\Delta A_m)^2}{P_A^2} = \frac{1}{N_o'} \frac{1 - (s^{(1)} P_A)^2}{2 T \sigma_o P_A^2}. \quad (2-108)$$

Diese Gleichung läßt sich nach N_o' auflösen. N_o' ist die Anzahl der Teilchen, die für jeden der Analyseprozesse "A" und "B" benötigt werden. Daraus erhält man die Gesamtzahl N_o der zur Polarisationsmessung erforderlichen Elektronen: Lassen sich die Messungen "A" und "B" gleichzeitig durchführen, so ist $N_o = N_o'$ (von diesem Typ ist beispielsweise die Messung der Ereignisraten in den Winkelbereichen um ϕ_A und ϕ_B im zweiten Beispiel (Gl. (2-100) ff.)); mißt man "A" und "B" hintereinander, so hat man jeweils N_o Teilchen zur Verfügung zu

stellen, d.h. es gilt $N_o = 2 N_o'$. Mit der Definition

$\chi \equiv 1$ für gleichzeitige Messung von "A" und "B" bzw.

$\chi \equiv 2$ bei Hintereinanderausführung von "A" und "B"

leitet man aus (2-108) ab, daß zur Messung der Polarisierung mit der Genauigkeit $(\Delta s^{(1)})^2$

$$N_o = \frac{\chi}{(\Delta s^{(1)})^2} \frac{1 - (s^{(1)} P_A)^2}{2 T \sigma_o P_A^2} \quad (2-109)$$

Teilchen erforderlich sind. (In den meisten Fällen ist die experimentelle Asymmetrie $|s^{(1)} P_A| \ll 1$, sodaß der Zähler ungefähr gleich 1 wird.)

Zweckmäßigerweise definiert man eine für die Analyseanordnung charakteristische Größe Σ_{exp} ,

$$\Sigma_{\text{exp}} \equiv \sigma_o P_A^2. \quad (2-110)$$

Σ_{exp} hat die Dimension einer Fläche und kann als effektiver Wirkungsquerschnitt für die Polarisationsmessung angesehen werden. Mit Hilfe von (2-109) und (2-110) läßt sich die Effizienz eines Polarimeters quantitativ erfassen. Eine Anordnung zur Messung der Polarisierung ist umso effizienter, je kleiner die Anzahl N_o der erforderlichen Teilchen ist.

Falls P_A den Polarisierungsgrad $s^{(2)}$ des Targets enthält,

$$P_A = s^{(2)} A, \quad (2-111)$$

ist es sinnvoll, die Größe Σ zu definieren, die nur von der Natur des Analyseprozesses, nicht von den experimentellen Möglichkeiten zur Polarisierung des Targets abhängt. Durch Division mit $(s^{(2)})^2$ entsteht aus (2-110)

$$\Sigma \equiv \frac{\Sigma_{\text{exp}}}{(s^{(2)})^2} = \sigma_o A^2. \quad (2-112)$$

Damit erhält man für N_o aus (2-109) den Ausdruck

$$N_o = \frac{\chi}{(\Delta s^{(1)})^2} \frac{1 - (s^{(1)} s^{(2)} A)^2}{(s^{(2)})^2 2 \Sigma T} . \quad (2-113)$$

Die angestrebte Meßgenauigkeit und der Polarisationsgrad des Targets gehen quadratisch in die Anzahl der zur Polarisationsmessung benötigten Teilchen ein.

2.2.2. Kaskadenprozess zur Polarisationsmessung

In Abschnitt 2.2.1 wurde gezeigt, wie man durch Streuung den Polarisationszustand eines Teilchenbündels messen kann. Dabei wurde der Analyseprozess isoliert von den Vorgängen betrachtet, die zur Entstehung der polarisierten Teilchen geführt hatten.

In diesem Abschnitt wird der Entstehungsprozess der polarisierten Teilchen, im folgenden als Primärprozess bezeichnet, in die Überlegungen einbezogen. Ziel ist die Bestimmung seiner Polarisationsasymmetrien. Zu diesem Zweck müssen im allgemeinsten Fall alle Reaktionsprodukte des Primärprozesses nochmals gestreut werden. Der gesamte Meßprozess besteht aus einer Kaskade von Teilprozessen. Im folgenden wird ein Ausdruck für diesen Kaskadenprozess angegeben und diskutiert. Nur (Primär-)Reaktionen mit zwei Teilchen im Endzustand werden betrachtet. Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Anzahl von Reaktionsprodukten ist offensichtlich.

Für die Diskussion des Kaskadenprozesses werden folgende Bezeichnungen verwendet (vgl. Abb. 2 - 5):

- Die Teilchen A und B heißen Primärteilchen. Sie bilden den Anfangszustand des Primärprozesses (P)

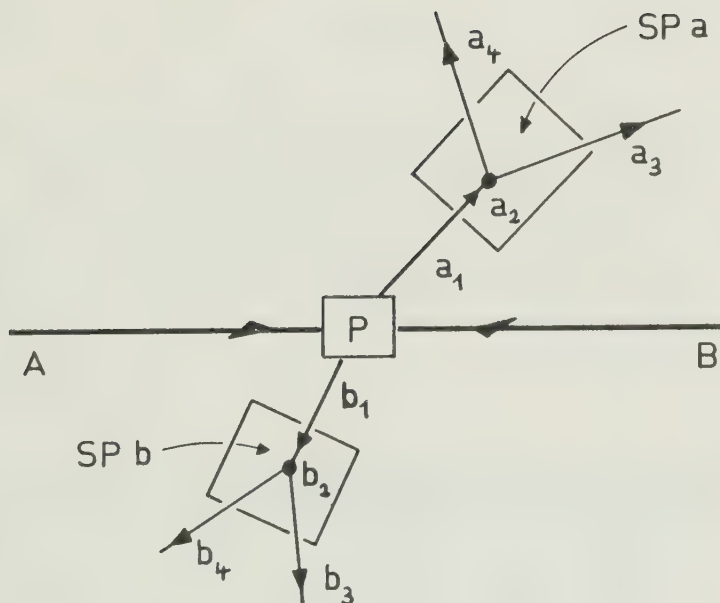


Abb. 2 - 5 : Kaskadenprozess zur Polarisationsmessung der bei dem Primärprozess (P) entstehenden Teilchen a_1 und b_1 . Die Polarisationsanalyse erfolgt mit Hilfe der sekundären Streuprozesse a (SP a) und b (SP b).

$$P : A + B \rightarrow a_1 + b_1 . \quad (2-114)$$

- Dabei entstehen die Sekundärteilchen a_1 und b_1 .
- Jedes der Teilchen a_1 und b_1 durchläuft einen Analyse- oder Sekundärprozess zur Bestimmung der Polarisation. Diese Streuprozesse werden mit den Buchstaben a und b gekennzeichnet.
- Im Sekundärprozess a wird das Sekundärteilchen a_1 an dem Target-Teilchen a_2 gestreut. Dabei entstehen die Tertiärteilchen $a_3, a_4, \dots$ Der Sekundärprozess (SP) a besteht demnach aus der Reaktion

$$SP\ a : a_1 + a_2 \rightarrow a_3 + a_4 + . . . \quad (2-115)$$

- Die Teilchen des Sekundärprozesses b werden entsprechend durch den Buchstaben b mit Teilchenindex i bezeichnet:

$$SP\ b : b_1 + b_2 \rightarrow b_3 + b_4 + . . . \quad (2-116)$$

Jeder der Analyseprozesse a und b für sich ist ein Streuprozess von der in Abschnitt 2.2.1 besprochenen Form. Die Notation in (2-115) und (2-116) ist so gewählt, daß der Zusammenhang mit Abschnitt 2.2.1 deutlich wird: Unterdrückt man die Buchstaben a und b in den beiden Gleichungen, so gelangt man zu der früher verwendeten Nomenklatur: $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$.

Zur vollständigen Bestimmung der Polarisationsasymmetrien des Primärprozesses (2-114) genügt es nicht, die Polarisation der Teilchen a_1 und b_1 unabhängig voneinander zu messen. Es sind Korrelationen zwischen den Analyseprozessen a und b zu berücksichtigen. Mit anderen Worten: Die Analyseprozesse a und b sind gemeinsam zu untersuchen. Im folgenden wird der Wirkungsquerschnitt σ_{Kask} für eine solche Analyse-kaskade angegeben. Sie besteht aus dem Primärprozess (2-114) mit anschließender Streuung der Teilchen a_1 und b_1 an den

Target-Teilchen a_2 und b_2 , wobei die Teilchen $a_3, a_4, \dots$ und $b_3, b_4, \dots$ entstehen. In Kurzschreibweise:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Kask}} &\equiv \sigma_{\text{Kask}} (A + B \rightarrow a_1 + b_1 ; & (2-117) \\ & a_1 + a_2 \rightarrow a_3 + a_4 + \dots \\ & b_1 + b_2 \rightarrow b_3 + b_4 + \dots) . \end{aligned}$$

σ_{Kask} hängt ab von der Polarisierung der Primärteilchen A und B, vom Polarisationszustand der Target-Teilchen a_2 und b_2 für den Sekundärprozess, vom Phasenraum der Teilchen a_1 und b_1 (er soll so klein gewählt sein, daß die Helizitätsamplituden für den Primärprozess als konstant angesehen werden können) sowie vom Phasenraum der Teilchen a_3 und b_3 . Außerdem geht die Anzahl und der Bewegungszustand der Target-Teilchen a_2 und b_2 ein.

Der Zustand der Teilchen a_1 und b_1 ist nur teilweise bekannt. Zumindest der zu messende Polarisationszustand ist noch unbestimmt. (Betrag und Richtung der Impulse können hier als bereits gemessen angesehen werden. Es sei vorausgesetzt, daß die Impulsmessung den Polarisationszustand der Teilchen nicht ändern. Das läßt sich z.B. durch Addition der Impulse der Tertiärteilchen erreichen.) Infolge dieser unvollständigen Kenntnis ist der Wirkungsquerschnitt σ_{Kask} nicht das Produkt aus dem Wirkungsquerschnitt für den Primärprozess und den Streuwahrscheinlichkeiten der Teilchen a_1 und b_1 an den Analyseapparaturen. Vielmehr hat man zuerst die Amplituden für den Primär- und die Sekundärprozesse miteinander zu multiplizieren und über alle möglichen Spineinstellungen der Sekundärteilchen zu summieren. Erst dann darf man das Betragsquadrat bilden.

Im einzelnen kann man folgendermaßen vorgehen. Zunächst wird die Spinabhängigkeit der Streuprozesse isoliert. Dazu betrachte man ein Teilchenbündel 1 mit bestimmter Dichte, Ausdehnung, Impuls ($\mathbf{p}_1$) und Helizität (λ_1). Es soll mit einem Teilchenbündel 2 (Impuls $\mathbf{p}_2$, Helizität λ_2) kollidieren. Mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit W entsteht dabei ein Teilchen 3 mit Impuls $\mathbf{p}_3$ und Helizität λ_3 unter gleichzeitiger Bildung eines Teilchen 4 mit Impuls $\mathbf{p}_4$ und Helizität λ_4 . W ist proportional zum Wirkungsquerschnitt σ . Der Proportionalkoeffizient,

der von der Bündelbeschaffenheit abhängt, werde wiederum mit T bezeichnet (seine genaue Form ist hier unwichtig).

$$W = \sigma T . \quad (2-118)$$

Der Wirkungsquerschnitt σ ist nach (2-9) und (2-33) das Produkt aus unpolarisierten Wirkungsquerschnitt σ_o und normiertem Betragsquadrat des Matricelementes ME .

$$W = \sigma_o T \frac{|ME|^2}{|ME|_{\text{unpol}}^2} . \quad (2-119)$$

$|ME|^2$ besteht aus Helizitätsamplituden und Spin-Dichtematrizen ρ (vgl. (2-9)) : Die Dichtematrizen projizieren auf bestimmte Spinzustände der einlaufenden und der gestreuten Teilchen; die Helizitätsamplituden beschreiben die Wechselwirkung. Interessiert man sich nur für die Spinabhängigkeit der Wechselwirkung, hält also sowohl Form, Größe und Geschwindigkeit der Bündel 1 und 2 als auch Impulse und Phasenräume der Teilchen 3 und 4 fest, so ist es sinnvoll Spinamplituden einzuführen, welche auf diese spezielle kinematische Situation bezogen sind:

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | SA | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (2-120)$$

$$\equiv \sqrt{\frac{\sigma_o T}{|ME|_{\text{unpol}}^2}} \langle p_3, \lambda_3 ; p_4, \lambda_4 | S | p_1, \lambda_1 ; p_2, \lambda_2 \rangle .$$

SA ist ein Streuoperator, der nur im Spinraum wirkt. Das Quadrat von (2-120) gibt, wie es sein muß, die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang der Teilchenbündel aus den Helizitätszuständen λ_1 und λ_2 in Einteilchen-Zustände mit den Helizitäten λ_3 und λ_4 an. Die Faktorisierung (2-120) der Streuamplitude in einen polarisationsunabhängigen und einen polarisationsabhängigen Faktor stellt die gewünschte Separation der Spineffekte dar. (In der Definition (2-120) ist vorausgesetzt, daß die Helizitätsamplitude über den Phasenraum der Streuteilchen

konstant ist.)

Amplituden der Form (2-120) schreibt man für den Primärprozess P,

$$\langle \lambda_{a_1} \lambda_{b_1} | SA_P | \lambda_A \lambda_B \rangle \quad (2-121)$$

$$\equiv \sqrt{\frac{\sigma_o(P) T(P)}{|ME|_{\text{unpol}}^2}} \langle P_{a_1}, \lambda_{a_1}; P_{b_1}, \lambda_{b_1} | S_P | P_A, \lambda_A; P_B, \lambda_B \rangle .$$

Für den Sekundärprozess a erhält man die Amplitude

$$\langle \lambda_{a_3} \lambda_{a_4} | SA_a | \lambda_{a_1} \lambda_{a_2} \rangle \quad (2-122)$$

$$\equiv \sqrt{\frac{\sigma_o(a) T(a)}{|ME|_{\text{unpol}}^2}} \langle P_{a_3}, \lambda_{a_3}; P_{a_4}, \lambda_{a_4} | S_a | P_{a_1}, \lambda_{a_1}; P_{a_2}, \lambda_{a_2} \rangle .$$

Auf analoge Weise ist die Amplitude für den Sekundärprozess b definiert. Die Normierung der Amplituden für die Sekundärprozesse a und b ist so gewählt, daß die Teilchenbündel a_1 und b_1 jeweils genau ein Teilchen enthalten. Die Amplitude G_{Kask} des gesamten Kaskadenprozesses erhält man dann durch Multiplikation der Amplituden der Teilprozesse und durch Summation über die unbeobachteten Zwischenzustände.

$$G_{\text{Kask}} = \sum_{\lambda_{a_1} \lambda_{b_1}} \langle \lambda_{a_1} \lambda_{b_1} | SA_P | \mu_A \mu_B \rangle \times \langle \lambda_{a_3} \lambda_{a_4} | SA_a | \lambda_{a_1} \mu_{a_2} \rangle \times \langle \lambda_{b_3} \lambda_{b_4} | SA_b | \lambda_{b_1} \mu_{b_2} \rangle \quad (2-123)$$

$\mu_A, \mu_B, \dots$ steht für beliebige reine Spinzustände der Teilchen A, B, ... Entwickelt man sie nach Helizitätsamplituden, so wird aus jedem dieser Zustände eine Summe über die Helizitätsbasiszustände mit Entwicklungskoeffizienten $\alpha_{\lambda_A}, \alpha_{\lambda_B}, \dots$ (vgl. (2-4)).

Die Wahrscheinlichkeit W_{Kask} für das Eintreten des Kaskadenprozesses ist

$$W_{\text{Kask}} = |G_{\text{Kask}}|^2. \quad (2-124)$$

G_{Kask} ist proportional zu $\sqrt{T_o(P)}$ (siehe (2-121)). Außerdem gilt nach (2-118)

$$W_{\text{Kask}} = \sigma_{\text{Kask}} T(P) \quad (2-125)$$

und damit

$$\sigma_{\text{Kask}} = |G_{\text{Kask}}|^2 / T(P). \quad (2-126)$$

Bildung des Betragsquadrates von G_{Kask} führt dazu, daß die Entwicklungskoeffizienten α_{λ_i} in der Form von Produkten $\alpha_{\lambda_i} \alpha_{\lambda_i'}^*$ auftreten. Nach (2-11) sind diese Produkte die Elemente der Spin-Dichtematrix eines reinen Zustandes. Mit (2-123) und nach Summation über die Spinzustände der Endprodukte a_3, a_4 und b_3, b_4 erhält man deshalb für (2-126)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Kask}} = & \frac{\sigma_o(P)}{|ME(P)|_{\text{unpol}}^2} \times \frac{\sigma_o(a) T(a)}{|ME(a)|_{\text{unpol}}^2} \times \frac{\sigma_o(b) T(b)}{|ME(b)|_{\text{unpol}}^2} \\ & \times \sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda_{a_1}' \\ \lambda_{b_1} \lambda_{b_1}'}} \left\{ \left[\sum_{\substack{\lambda_{a_2} \lambda_{a_2}' \\ \lambda_{a_3} \lambda_{a_4}}} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda_{a_2}'} \langle \lambda_{a_3} \lambda_{a_4} | S_a | \lambda_{a_1} \lambda_{a_2} \rangle \right. \right. \\ & \left. \left. \times \langle \lambda_{a_3} \lambda_{a_4} | S_a | \lambda_{a_1}' \lambda_{a_2}' \rangle^* \right] \right. \\ & \left. \times \left[\sum_{\substack{\lambda_{b_2} \lambda_{b_2}' \\ \lambda_{b_3} \lambda_{b_4}}} \rho(b_2)_{\lambda_{b_2} \lambda_{b_2}'} \langle \lambda_{b_3} \lambda_{b_4} | S_b | \lambda_{b_1} \lambda_{b_2} \rangle \right. \right. \\ & \left. \left. \times \langle \lambda_{b_3} \lambda_{b_4} | S_b | \lambda_{b_1}' \lambda_{b_2}' \rangle^* \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left[\sum_{\substack{\lambda_A \lambda_A' \\ \lambda_B \lambda_B'}} \rho(A)_{\lambda_A \lambda_A'} \rho(B)_{\lambda_B \lambda_B'} \times \begin{aligned} &\langle \lambda_{a_1} \lambda_{b_1} | S_P | \lambda_A \lambda_B \rangle \\ &\times \langle \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1}' | S_P | \lambda_A' \lambda_B' \rangle^* \end{aligned} \right] \quad (2-127)$$

Diese Gleichung läßt sich übersichtlicher schreiben, wenn man einige normierten Größen mit der Bedeutung von normierten Übergangswahrscheinlichkeiten einführt, nämlich für den Analyseprozess a

$$\hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda_{a_1}' \lambda_{a_2}'} \equiv \frac{W(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda_{a_1}' \lambda_{a_2}'}}{|ME(a)|_{\text{unpol}}^2} \quad (2-128)$$

mit

$$|ME(a)|_{\text{unpol}} \equiv \frac{1}{f_{a_1} f_{a_2}} \sum_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}} W(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda_{a_1} \lambda_{a_2}}$$

- eine analoge Definition wählt man für den Prozess b - und für den Primärprozess P

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}; \lambda_A' \lambda_B' \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1}'} &\equiv \\ \equiv \frac{\langle \lambda_{a_1} \lambda_{b_1} | S_P | \lambda_A \lambda_B \rangle \langle \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1}' | S_P | \lambda_A' \lambda_B' \rangle^*}{|ME(P)|_{\text{unpol}}^2} \end{aligned} \quad (2-129)$$

mit

$$|ME(P)|_{\text{unpol}}^2 = \frac{1}{f_A f_B} \sum_{\substack{\lambda_A \lambda_B \\ \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}}} |\langle \lambda_{a_1} \lambda_{b_1} | S_P | \lambda_A \lambda_B \rangle|^2$$

$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$ ist in (2-29) definiert. In $W_{\dots}$ ist über die Helizität der gestreuten Teilchen summiert, in $H_{\dots}$ dagegen nicht. Die Nenner in (2-128) und (2-129) sind jeweils proportional zu den unpolarisierten

Wirkungsquerschnitten. Die Größen f_A und f_B geben an, wieviele Spinfreiheitsgrade die Primärteilchen A und B haben. Sie sorgen für die Spinmittelung im Anfangszustand. Mit diesen Bezeichnungen und mit $W_o(i) \equiv \sigma_o(i) T(i)$ (vgl. (2-118)) wird (2-127) zu

$$\sigma_{Kask} = \sigma_o(P) W_o(a) W_o(b) \quad (2-130)$$

$$\times \sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda_{a_1}' \\ \lambda_{b_1} \lambda_{b_1}'}} \left\{ \left[\sum_{\lambda_{a_2} \lambda_{a_2}'} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda_{a_2}'} \hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda_{a_1}' \lambda_{a_2}'} \right] \right. \\ \times \left[\sum_{\lambda_{b_2} \lambda_{b_2}'} \rho(b_2)_{\lambda_{b_2} \lambda_{b_2}'} \hat{W}(b)_{\lambda_{b_1} \lambda_{b_2}; \lambda_{b_1}' \lambda_{b_2}'} \right] \\ \times \left[\sum_{\substack{\lambda_A \lambda_A' \\ \lambda_B \lambda_B'}} \rho(A)_{\lambda_A \lambda_A'} \rho(B)_{\lambda_B \lambda_B'} \right. \\ \left. \times \hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}; \lambda_A' \lambda_B' \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1}'} \right] \left. \right\}.$$

Besteht der Endzustand des Primärprozesses aus mehr als 2 Teilchen, deren Polarisation ebenfalls analysiert werden soll, so muß man Terme der Form

$$\sum_{\lambda_{c_2} \lambda_{c_2}'} \rho(c_2)_{\lambda_{c_2} \lambda_{c_2}'} \hat{W}(c)_{\lambda_{c_1} \lambda_{c_2}; \lambda_{c_1}' \lambda_{c_2}'} , \text{ etc.}$$

einfügen. $\hat{H}_{\lambda_A \dots; \lambda_A' \dots}$ erhält zusätzliche Indizes

$$\hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1} \lambda_{c_1} \dots; \lambda_A' \lambda_B' \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1}' \lambda_{c_1}' \dots}$$

und der ganze Ausdruck ist mit den Streuwahrscheinlichkeiten $W_o(i)$ für die weiteren Analyseprozesse c, d, ... zu multiplizieren.

$$W_o(a) W_o(b) \rightarrow \prod_{i=a,b,c,\dots} W_o(i) .$$

Im folgenden 3 Bemerkungen zu den Gln. (2-106) bzw. (2-109):

1) Die Größenordnung des Wirkungsquerschnittes σ_{Kask} wird bestimmt durch den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $\sigma_0(P)$ für den Primärprozess, multipliziert mit den Wahrscheinlichkeiten $W_0(a)$ und $W_0(b)$ für die Streuung eines unpolarisierten Teilchens a_1 bzw. b_1 an den Meßvorrichtungen a bzw. b . Das zeigt, wie wichtig eine große Streuwahrscheinlichkeit für den Analyseprozess ist.

2) Definiert man die Matrix

$$R(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_1}'}^* \equiv \sum_{\lambda_{a_2} \lambda_{a_2}'} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda_{a_2}'} \hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda_{a_1}' \lambda_{a_2}'} \quad (2-131)$$

und normiert diese zu der Matrix

$$\rho(a) \equiv R(a) / \text{Tr } R(a), \quad (2-132)$$

so kann man $\rho(a)$ als Dichtematrix des Analyseprozesses a ansehen. ($\rho(a)$ erfüllt die Hermitezitätseigenschaft (2-15) und die Spur von $\rho(a)$ ist 1 (vgl. (2-16)). Das entnimmt man unmittelbar den Definitionsgleichungen (2-131) und (2-132) und der Beziehung (2-30) für $\hat{W}_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$.) $\rho(a)$ hängt ab vom Polarisationszustand des Targets und von der Auswahl der registrierten Tertiärteilchen.

Einsetzen von (2-132) in (2-130) und Umsortieren der einzelnen Glieder ergibt für den Wirkungsquerschnitt der Kaskade

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Kask}} = & W_0(a) \text{Tr } R(a) \times W_0(b) \text{Tr } R(b) \times \\ & \times \left(\sigma_0(P) \sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1} \lambda_{b_1}' \\ \lambda_A \lambda_A' \lambda_B \lambda_B'}} \rho(A)_{\lambda_A \lambda_A'} \rho(B)_{\lambda_B \lambda_B'} \right. \\ & \times \rho(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_1}'}^* \rho(b)_{\lambda_{b_1} \lambda_{b_1}'}^* \\ & \left. \times \hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}; \lambda_A' \lambda_B' \lambda_{a_1}' \lambda_{b_1}'} \right). \end{aligned} \quad (2-133)$$

Der Ausdruck (...) in den runden Klammern enthält den Wirkungsquerschnitt für den polarisierten Primärprozess in der üblichen Form. Die Spur aller verwendeten Spin-Dichtematrizen ρ in der Klammer ist 1.

Das Auftreten des Faktors $\text{Tr } R(a)$ (und entsprechend des Faktors $\text{Tr } R(b)$) ist plausibel: Bei der Herleitung von (2-127) für den Wirkungsquerschnitts σ_{Kask} wird über die Zwischenzustände des Teilchens a_1 summiert; die Summe in der runden Klammer von (2-133) dagegen gibt den Wirkungsquerschnitt für die Streuung in einen bestimmten Polarisationszustand an, d.h. es findet keine Summation statt. Der Faktor $\text{Tr } R(a)$ sorgt für die in der runden Klammer fehlende Summation über die Spin-Zwischenzustände. Er entspricht im wesentlichen der Anzahl f_a der Spinfreiheitsgrad des unbeobachteten Teilchens a : Nach (2-110) und wegen $\rho(\text{unpol})_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}/f_a$ kann man ja $\text{Tr } R(a)$ umformen zu

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr } R(a) \\
 &= \sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1} \\ \lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}}} \delta_{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1}} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}} \hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda'_{a_1} \lambda'_{a_2}} \\
 &= f_a \times \sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1} \\ \lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}}} \rho(a_1 \text{ unpol})_{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1}} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}} \hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda'_{a_1} \lambda'_{a_2}} \\
 &= f_a \times \{ 1 + \text{Terme proportional zu Polarisations-} \\
 & \quad \text{parametern von Teilchen } a_2, \\
 & \quad \text{unabhängig von der Polarisation von} \\
 & \quad \text{Teilchen } a_1 \} .
 \end{aligned} \tag{2-134}$$

Für die Analyseprozesse, die in den Kapiteln 4, 5 und 6 behandelt werden, verschwinden Einteilchen-Polarisationsasymmetrien. In diesem Fall gilt $\{\dots\} \rightarrow 1$.

3) Gl. (2-130) läßt sich in eine Form bringen, welche es erlaubt, die in Abschnitt 2.2.1 angegebenen Formeln für die Effektivität einer (einzelnen) Polarisationsmessung auf den Kaskadenprozess zu übertragen.

Definiert man

$$\begin{aligned}
 & R(\text{Strahl } a_1; b_1)_{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1}} \\
 & \equiv \sum_{\lambda_{b_1} \lambda'_{b_1}} \left[\sum_{\lambda_{b_2} \lambda'_{b_2}} \rho(b_2)_{\lambda_{b_2} \lambda'_{b_2}} \hat{W}(b)_{\lambda_{b_1} \lambda_{b_2}; \lambda'_{b_1} \lambda'_{b_2}} \right. \\
 & \quad \times \sum_{\substack{\lambda_A \lambda'_A \\ \lambda_B \lambda'_B}} \rho(A)_{\lambda_A \lambda'_A} \rho(B)_{\lambda_B \lambda'_B} \hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}; \lambda'_A \lambda'_B \lambda'_{a_1} \lambda'_{b_1}} \left. \right],
 \end{aligned} \tag{2-135}$$

so hat die damit gebildete Matrix

$$\rho(\text{Strahl } a_1; b_1) = \frac{R(\text{Strahl } a_1; b_1)}{\text{Tr } R(\text{Strahl } a_1; b_1)} \tag{2-136}$$

wiederum die Eigenschaften einer Dichtematrix. Sie ist die Dichtematrix des Teilchenstrahles a_1 (eine analoge Definition läßt sich für Teilchen b_1 und im allgemeinen Fall für jedes andere Teilchen aus dem Endzustand des Primärprozesses angeben). Der Buchstabe b_1 im Argument von $\rho(\text{Strahl } a_1; b_1)$ soll darauf hinweisen, daß die Dichtematrix davon abhängig ist, wie das Teilchen b_1 registriert wird. Diese Abhängigkeit ist zu erwarten, denn dadurch, daß man in Koinzidenz mit einem anderen Ereignis mißt – das Teilchen b_1 muß eine festgelegte Reaktion zeigen –, bestimmt man nur den Polarisationszustand einer Teilmenge aus der Menge aller Teilchen, die auf das Target a_2 treffen. Wenn man über die Polarisationszustände des Teilchens b_1 summiert, d.h. wenn man den Polarisationszustand aller auf das Target a_2 treffenden Teilchen bestimmt, erhält man insbesondere aus (2-135) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \rho(\text{Strahl } a_1; b_1 \text{ unpol.})_{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1}} = \\
 & = \frac{\sum_{\lambda_A \lambda'_A \lambda_B \lambda'_B \lambda_{b_1}} \rho(A)_{\lambda_A \lambda'_A} \rho(B)_{\lambda_B \lambda'_B} \hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}; \lambda'_A \lambda'_B \lambda'_{a_1} \lambda'_{b_1}}}{\sum_{\lambda_A \lambda'_A \lambda_B \lambda'_B \lambda_{b_1} \lambda_{a_1}} \rho(A)_{\lambda_A \lambda'_A} \rho(B)_{\lambda_B \lambda'_B} \hat{H}_{\lambda_A \lambda_B \lambda_{a_1} \lambda_{b_1}; \lambda'_A \lambda'_B \lambda'_{a_1} \lambda'_{b_1}}}
 \end{aligned} \quad (2-137)$$

Mit der Definition (2-136) nimmt σ_{Kask} die Form

$$\begin{aligned}
 \sigma_{Kas} &= \sigma_o(a_1; b_1) \times W_o(a) \\
 &\times \sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1} \\ \lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}}} \rho(\text{Strahl } a_1; b_1)_{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1}} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}} \\
 &\times \hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda'_{a_1} \lambda'_{a_2}}
 \end{aligned} \quad (2-138)$$

an. Der Ausdruck

$$\sigma_o(a_1; b_1) \equiv \sigma_o(P) W_o(b) \text{Tr } R(\text{Strahl } a_1; b_1) \quad (2-139)$$

ist der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Teilchens a_1 ohne Berücksichtigung seiner Polarisierung, aber unter der Nebenbedingung, daß gleichzeitig das Teilchen b_1 an den Analyse-Teilchen b_2 auf eine festgelegte Art reagiert (z.B. Emission eines Teilchens b_3 in einen bestimmten Raumwinkel).

Mit den Formeln (2-138) und (2-139) ist nun der Zusammenhang hergestellt zu der in Abschnitt 2.2.1 besprochenen Polarisationsmessung an einem Teilchenstrahl, denn die Ereignisrate, die man aus (2-138) durch Multiplikation mit der Luminosität $L(P)$ des Primärprozesses erhält, ist von der Form (2-97). Beweis: durch Multiplikation von (2-139) mit $L(P)$ erhält man ein Teilchenensemble von

$$N'_0(a_1) = \sigma_0(a_1; b_1) L(P) \quad (2-140)$$

Teilchen. Die Impulse dieser Teilchen liegen in einem Raumwinkelbereich um den Impuls $\mathbf{p}_{a_1}$. Ein Teilchen gehört zu dem Ensemble $N'_0(a_1)$, falls das in demselben Einzelprozess entstandene Teilchen b_1 eine bestimmte Reaktion zeigt (Koinzidenzbedingung). Die Anzahl $N'_0(a_1)$ der Teilchen des Ensembles entspricht der Zahl N'_0 aus (2-97). Betrachtet man ferner den Spezialfall, daß erstens Teilchen a_1 ein Elektron ist und zweitens die Analyseapparatur nur auf die longitudinale Polarisation anspricht, so geht

$$\sum_{\substack{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1} \\ \lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}}} \rho(\text{Strahl } a_1; b_1)_{\lambda_{a_1} \lambda'_{a_1}} \rho(a_2)_{\lambda_{a_2} \lambda'_{a_2}} \hat{W}(a)_{\lambda_{a_1} \lambda_{a_2}; \lambda'_{a_1} \lambda'_{a_2}}$$

über in den Ausdruck

$$1 + s_{||}(\text{Strahl } a_1; b_1) s_{||}(a_2) A_{LL} \equiv 1 + s_{||}^{(1)} s_{||}^{(2)} A_{LL}.$$

Zusammen mit (2-96) folgt damit die Behauptung.

Es sei darauf hingewiesen, daß man zur Polarisationsmessung von Streuteilchen das Koordinatensystem für den Analyseprozess auf eine ganz bestimmte Weise festlegen muß. Die Polarisationsparameter der Teilchen a_1 und b_1 sind in den lokalen Koordinatensystemen (LKS) $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$ der Teilchen $i = a_1, b_1$ definiert. Die LKSe entstehen aus dem Laborsystem $x_p y_p z_p$ des Primärprozesses indem man die z_p -Achse auf genau festgelegte Weise (vgl. Abschnitt 2.1.2 für eine detailliert Beschreibung) in die Richtung des Impulses $\mathbf{p}_i$ von Teilchen i dreht. Wenn man daher die Gleichungen aus Abschnitt 2.1 über die Struktur von Wirkungsquerschnitten bei kollinear Kollision der Teilchen zur Messung der Endzustandspolarisation von Teilchen a_1 ausnutzen will, dann muß das Laborsystem xyz für den Analyseprozess a mit dem LKS $x^{(a)}y^{(a)}z^{(a)}$ von Teilchen a_1 zusammenfallen (vgl. Abb. 2-6). Nur dann sind die Polarisationsparameter aus Abschnitt 2.1 für das Teilchen 1 im Anfangszustand des Analyseprozesses identisch mit den Polarisationsparametern von Teilchen a_1 im Endzustand des Primärprozesses.

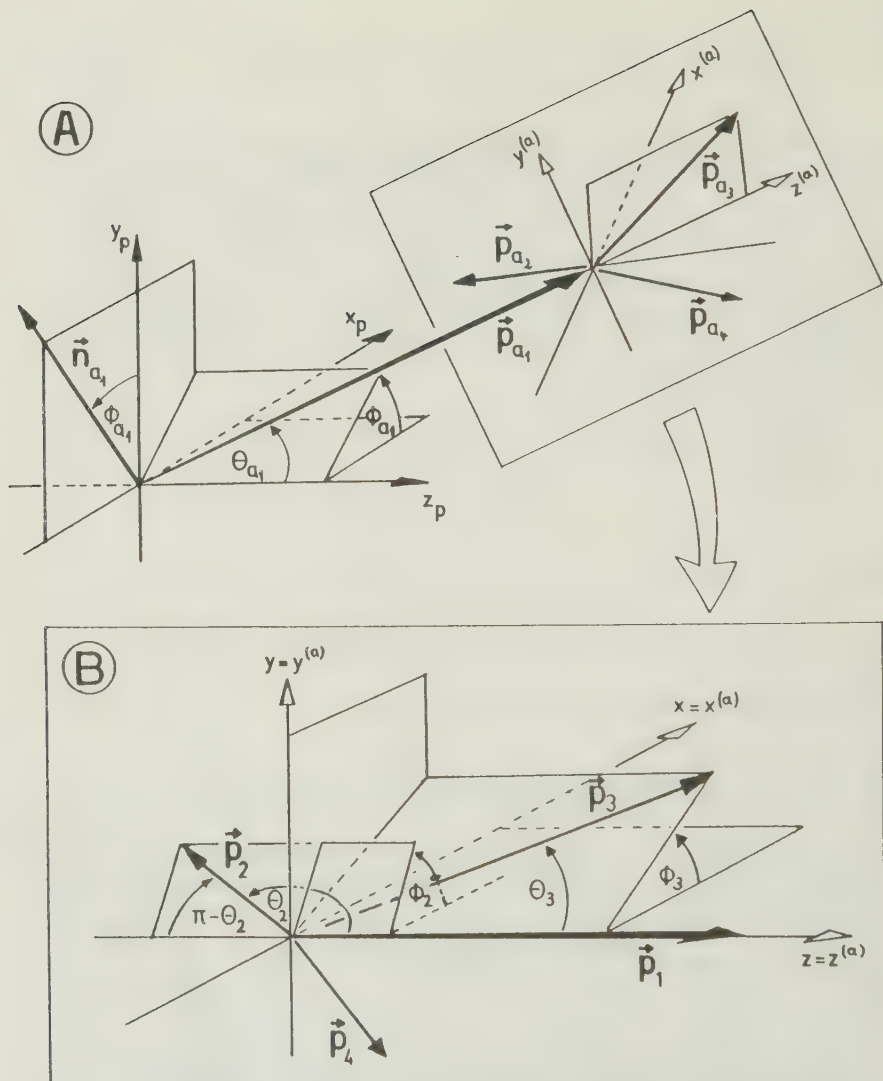


Abb. 2 - 6 : Figur A : Die Polarisationsanalyse von Teilchen a_1 wird in dessen lokalem Koordinatensystem $x^{(a)}y^{(a)}z^{(a)}$ betrachtet. $x^{(a)}y^{(a)}z^{(a)}$ entsteht aus $x_p y_p z_p$ des Primärprozesses durch Drehung um $\vec{n}_{a_1}$ mit Drehwinkel θ_{a_1} . Figur B : Vergrößerte Darstellung des Analyseprozesses im Laborsystem $xyz \equiv x^{(a)}y^{(a)}z^{(a)}$.

3. AUSWAHL DER ANALYSEPROZESSE ZUR POLARISATIONSMESSUNG VON HOCHENERGETISCHEN ELEKTRONEN

Eine wesentliche Aufgabe besteht darin, aus der Vielzahl der polarisationsabhängigen Streuprozesse diejenigen auszusuchen, welche als Analyseprozesse zur Messung der Polarisation von hochenergetischen Elektronen (Positronen) am besten geeignet sind: In dem vorliegenden Kapitel wird eine Vorauswahl getroffen; in den Kapitel 4 bis 6 werden die verbleibenden Streuprozesse näher untersucht.

Zunächst muß festgelegt werden, in welchem Bereich die Energie der Elektronen liegt, deren Polarisationszustand bestimmt werden soll (Abschnitt 3.1). Die Polarisationsabhängigkeit vieler Streuprozesse ist ja energieabhängig. So ist bekannt, daß beispielsweise die zur Polarisationsanalyse niederenergetischer Elektronen verwendete Mott-Streuung (siehe z.B. [19]) ungeeignet für die Polarisationsmessung an hochenergetischen Elektronen ist, weil für diese die Polarisationsasymmetrie verschwindet.

Nach Festlegung der Energie der Elektronen kann man Abschätzungen für die zu erwartenden Zählraten (Abschnitt 3.2) und Energie- und Impulsüberträge (Abschnitt 3.3) angeben.

Nach Abschnitt 2.2.1 ist die Anzahl der für die Polarisationsmessung erforderlichen Elektronen quadratisch vom Polarisationsgrad des Targets abhängig. In Abschnitt 3.4 wird ein Überblick gegeben, bis zu welchem Grad die verschiedenen Targets experimentell polarisiert werden können.

In Abschnitt 3.5 sind die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.1 bis 3.4 zusammengefaßt. Es wird festgelegt, welche Streuprozesse im weiteren zu untersuchen sind.

Es gibt Streuprozesse, bei denen sich die Polarisation eines Elektrons (Positrons) aus dem Polarisationszustand eines bei der Analysestreuung entstehenden Teilchens bestimmen läßt. Z.B. spiegelt sich der Polarisations-

tionszustand eines Elektrons, das im Kernfeld abgebremst wird, im Polarisationszustand des abgestrahlten hochenergetischen Photons wider [26]. Derartige Prozesse werden hier nicht betrachtet. Die Polarisationsmessung an γ -Quanten ist ja von vergleichbarer Schwierigkeit wie die Polarisationsmessung an hochenergetischen Elektronen. Man würde daher die Schwierigkeiten nur eine Stufe weiterschieben und zusätzlich vergrößern.

Bemerkung: In diesem und den folgenden Kapiteln werden die zu analysierende Elektronen (Positronen) auch als Teilchen 1, die Target-Teilchen auch als Teilchen 2 bezeichnet. Wie in Abschnitt 2.1 fliegen die Teilchen 1 längs der positiven z-Achse des Labor-Koordinatensystem; die Teilchen 2 bewegen sich in der Regel längs der negativen z-Achse oder ruhen im Laborsystem.

3.1. Energiebereich

In den folgenden Kapiteln werden Möglichkeiten zur Messung der Polarisationsparameter von hochenergetischen Elektronen (Positronen) untersucht. Dabei sei ein hochenergetisches Teilchen eines, dessen Energie $E_{1,L}$ im Laborsystem im Bereich $1 \text{ GeV} \leq E_{1,L} \leq 1 \text{ TeV}$ liegt. Damit ist der derzeit zugängliche und der in absehbarer Zeit zur Verfügung stehende Energiebereich überdeckt oder zumindest größenordnungsmäßig erreicht (CERN-SPS, SLAC-SLC, LEP, HERA, SSC).

3.2. Zählraten

Nur bei Verwendung von Streuprozessen mit großen Ereignisraten kann man hoffen, an der verhältnismässig kleinen Zahl von Elektronen, die in

hochenergetischen Streuexperimenten entstehen, die Polarisation messen zu können. In Gl. (2-109) bzw. (2-113) wurde angegeben, wieviele Teilchen man für die Durchführung einer Polarisationsanalyse mindestens benötigt, wenn man den Polarisationsparameter s mit der Genauigkeit Δs messen möchte. Die Formel stützt sich ausschließlich auf die Zählratenstatistik und gibt eine prinzipielle untere Grenze für die erforderliche Teilchenzahl an (systematische Ungenauigkeiten verschieben diese Grenze zu höherer Teilchenzahl). Gl. (2-109) entnimmt man, daß das Produkt aus dem Wirkungsquerschnitt σ_0 und dem Targetfaktor T der Analysevorrichtung, also die Streuwahrscheinlichkeit für unpolarisierte Teilchen am unpolarisierten Target, möglichst groß sein sollte.

Bereits eine Abschätzung der Größenordnung des Targetfaktors T erlaubt es, eine Reihe von denkbaren Analyseprozessen als wenig geeignet auszuschließen.

T ist gegeben durch

$$T = C n_2 a \quad (3-1)$$

(vgl. (2-95) und (2-96)). n_2 ist die Dichte der Targetteilchen; a bezeichnet die Länge der Flugstrecke der Teilchen 1 innerhalb des Targets, gemessen im Laborsystem; C ist ein Zahlenfaktor der Größenordnung 1, welcher von der Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen 1 und 2 abhängt. Bewegen sich die Teilchen im Laborsystem mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu und ist D die Dicke der Targetschicht, so ist $a = D/2$ und C nimmt den Wert 2 an.

Für ein ruhendes Target ist $a = D$ und $C = 1$.

$$T = n_2 D \quad (\text{für ruhendes Target}). \quad (3-2)$$

Nimmt man eine für Festkörper und Flüssigkeiten charakteristische Teilchendichte von $n_2 = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ (= Größenordnung der Loschmidtschen Zahl) an und setzt für die Targetdicke $D = 1 \text{ cm}$ ein, so bekommt man einen Wert von $T \approx 10^{23} \text{ cm}^{-2}$.

Verwendet man Teilchenstrahlen als Target, dann hängt C im allgemeinen sowohl von dem Einfallswinkel Θ_2 (vgl. Abb. 2 - 6) als auch von der Geschwindigkeit der Targetteilchen ab. Der genaue Zusammenhang wird in Abschnitt 6.3 bei der Diskussion von Lasertargets angegeben (siehe Gl. (6-40)). Mit Photonen als Target lassen sich hohe Teilchendichten erreichen: Für die Photonenbündel von Hochleistungslasern sind Werte von $n_2 \approx 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ realistisch. Dabei ist vorausgesetzt, daß ein 10^{-10} s dauernder Puls eines Lasers der Leistung 10^{12} Watt auf einen Durchmesser von $30 \text{ }\mu\text{m}$ gebündelt wird (Daten aus [27,28]). Strahlen aus hochenergetischen massiven Teilchen dagegen haben sehr viel geringere Dichten: Ein Bündel aus 10^{11} Teilchen weist bei einer Länge von 1 cm und einem Durchmesser von $1 \text{ }\mu\text{m}$ - das sind erreichbare Werte für die Teilchenbündel in Beschleunigeranlagen - eine Teilchendichte von $n_2 \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ auf.

Targets aus Strahlen massiver Teilchen können mit ihrer niedrigen Teilchendichte weder mit festen ruhenden Targets noch mit Photontargets konkurrieren. Solche Targets werden daher im folgenden nicht betrachtet. Gegen ihre Verwendung spricht auch, daß die zu erwartenden Wirkungsquerschnitte kleiner sind als in den beiden anderen Fällen. Der Grund liegt in der vergleichsweise hohen Schwerpunktenenergie bzw. in dem hohen Impulsübertrag bei der Streuung hochenergetischer Elektronen an beschleunigten massiven Teilchen. Damit verbunden ist in der Regel ein kleinerer Wirkungsquerschnitt. Zwar könnte man durch Streuung an hochenergetischen Targetteilchen in den ansonsten kinematisch unzugänglichen Bereich bestimmter Teilchen-Resonanzen gelangen, wie etwa in den Bereich der Z^0 -Resonanz. Aber auch an diesen Stellen sind die erreichbaren Zählraten viel zu klein.

3.3. Kinematik; Energie- und Impulsüberträge

Die Kinematik der Streuung hochenergetischen Elektron an ruhenden massiven Targets und an Photontargets ist Gegenstand dieses

Abschnittes. Im folgenden werden Formeln für Streuwinkel und Energie-Impuls-Überträge angegeben und einige typische Zahlenbeispiele berechnet.

Zur Beschreibung des Streuprozesses werden 3 Bezugssysteme verwendet: Das Laborsystem, in dem das feste Target oder die Laserapparatur ruht, das Schwerpunktsystem und – bei Compton-Streuung – das Ruhssystem des einfallenden Teilchens. In jedem dieser Bezugssysteme hat der Impuls des ungestreuten Elektrons die Form $\mathbf{p}_1 = (0, 0, |\mathbf{p}_1|)$. Der Impuls des Targetteilchens ist gegeben durch $\mathbf{p}_2 = (0, 0, -|\mathbf{p}_2|)$. Ein Index legt fest, in welchem Bezugssystem eine physikalische Größe betrachtet wird. Es steht "L" für Laborsystem, "S" für Schwerpunktsystem und "R" für Ruhssystem. Teilchen i wird beschrieben durch

- die Masse m_i ,
- die Energie E_i ,
- den Impuls $\mathbf{p}_i$,
- den Viererimpuls $p = (E_i, \mathbf{p}_i)$,
- den Polarwinkel θ_i (vgl. Abb. 2 - 1),
- den Azimutwinkel ϕ_i (vgl. Abb. 2 - 1),
- die Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{p}_i / m_i = \mathbf{v}_i / c$,
- den Lorentz-Faktor $\gamma_i = E_i / m_i = (1 - \beta_i^2)^{-1/2}$.

c ist die Lichtgeschwindigkeit.

3.3.1. Ruhendes Target

Es ist nützlich, sowohl Laborsystem- als auch Schwerpunktsystemgrößen zu betrachten. Das Schwerpunktsystem bewegt sich im Laborsystem mit der Geschwindigkeit $v_{CM,L}$. Für den Lorentz-Faktor der Schwerpunktbewegung erhält man (siehe z.B. [29])

$$\gamma_{CM,L} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{CM,L}/c)^2}} = \frac{E_{1,L} + E_{2,L}}{\sqrt{s}} \quad (3-3)$$

Dabei ist s das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem.

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2. \quad (3-4)$$

Im Laborsystem hat s wegen $E_{2,L} = m_2$ die Form

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2 E_{1,L} m_2. \quad (3-5)$$

Für ein im Laborsystem ruhendes Target-Teilchen 2 ist die Geschwindigkeit $v_{2,S}$ im Schwerpunktsystem betragsmäßig gleich der Geschwindigkeit $v_{CM,L}$ des Schwerpunktsystemes im Laborsystem. Daher gilt

$$v_{CM,L} = v_{2,S}. \quad (3-6)$$

Mit (3-3) kann man die Energie $E_{3,L}$ des Streuteilchens 3 im Laborsystem durch die Größen im Schwerpunktsystem ausdrücken.

$$E_{3,L} = |p_{3,S}| \cos\theta_{3,S} \sqrt{v_{2,S}^2 - 1} + E_{3,S} v_{2,S}. \quad (3-7)$$

Falls sich die Massen der Teilchen 2 und 3 im Schwerpunktsystem vernachlässigen lassen (Hochenergienäherung, HEA), erhält man für (3-7) den Näherungsausdruck

$$E_{3,L} \underset{\text{HEA}}{\approx} E_{3,S} v_{2,S} (1 + \cos\theta_{3,S}). \quad (3-8)$$

Nach (3-7) bzw. (3-8) bestimmen die Energie $E_{3,S}$ und der Emissionswinkel $\theta_{3,S}$ des Streuteilchens im Schwerpunktsystem auf einfache Weise die Energie $E_{3,L}$ des Teilchens im Laborsystem.

Die Streuwinkel im Laborsystem sind überwiegend sehr klein. Wegen der Invarianz der transversalen Impulskomponente bei Lorentz-Transformationen,

$$p_{3,S} \sin\theta_{3,S} = p_{3,L} \sin\theta_{3,L}, \quad (3-9)$$

läßt sich mit Hilfe von (3-7) der Streuwinkel $\theta_{3,L}$ im Laborsystem durch Größen im Schwerpunktsystem ausdrücken. In Hochenergienäherung

für die Teilchen 2 und 3 erhält man

$$\sin\Theta_{3,L} = \frac{p_{3,S}}{\sqrt{E_{3,S}^2 - m_3^2}} \sin\Theta_{3,S} \stackrel{\text{HEA}}{\approx} \frac{1}{\gamma_{2,S}} \frac{\sin\Theta_{3,S}}{1 + \cos\Theta_{3,S}} \quad (3-10)$$

Der Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ ist somit von der Größenordnung $O(1/\gamma_{2,S})$.
(Zahlenbeispiele folgen auf den nächsten Seiten.)

Die Energie-Impuls-Übertragung $Q^2 = -q^2$ für elastische Prozesse ($|p_{3,S}| = |p_{1,S}|$, $m_3 = m_1$) beträgt

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = -(p_3 - p_1)^2 \\ &= (2 E_{1,L} m_2 + m_2^2 - m_1^2) \times (1 - \cos\Theta_{3,S}). \end{aligned} \quad (3-11)$$

In Hochenergienäherung für Teilchen 1 erhält man mit (3-4)

$$Q^2 \stackrel{\text{HEA}}{\approx} s (1 - \cos\Theta_{3,S}). \quad (3-12)$$

Für inelastische Prozesse mit $m_4 > m_2$ und $m_1 = m_3$ tritt an die Stelle von (3-12) die Ungleichung

$$Q^2 \stackrel{\text{HEA}}{\leq} s (1 - \cos\Theta_{3,S}). \quad (3-13)$$

Einige Zahlenbeispiele zu den Gln. (3-3) bis (3-12) geben Auskunft über die Größe der Streuwinkel. Sie zeigen auch, daß Effekte der schwachen Wechselwirkung in möglichen Analyseprozessen vernachlässigt werden können. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

Streuung an Hüllenelektronen der Targetatome

Falls das Targetelektron von einem Elektron (Positron) mit einer Energie von $E_{1,L} = 1 \text{ TeV}$ getroffen wird, dann ist nach (3-5) und (3-11)

$$s \approx 1 \text{ GeV}^2 \quad \text{und} \quad Q^2 \leq Q_{\text{max}}^2 \approx 2 \text{ GeV}^2 .$$

Demnach können Effekte der schwachen Wechselwirkung vernachlässigt werden, da s und Q^2 sehr viel kleiner als das Quadrat der Masse des Z^0 sind ($m_{Z^0} \approx 92.5 \text{ GeV}$ [30]).

Der Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ des Elektrons ist sehr klein, denn aus (3-6) und (3-3) folgt in Hochenergienäherung und mit $m_1 = m_2$

$$\frac{1}{\gamma_{2,S}} = \frac{\sqrt{2 E_{1,L} m_1}}{E_{1,L}} = \sqrt{\frac{2 m_1}{E_{1,L}}} . \quad (3-14)$$

Für $E_{1,L} = 1 \text{ TeV}$ ist nach (3-10) $\Theta_{3,L}$ von der Größenordnung 1 mrad . Die Streuteilchen werden vorzugsweise in den experimentell schlecht auflösbaren Vorwärtskegel mit Öffnungswinkel $O(1/\gamma_{2,S})$ emittiert.

Die Messung der Streuwinkel nahe der Vorwärtsrichtung lässt sich jedoch umgehen, da die Energie der gestreuten Teilchen sich sehr deutlich ändert, wenn man den Streuwinkel innerhalb des Vorwärtskegel variiert. (Man vergleiche dazu, wie sich eine Änderung des Streuwinkels $\Theta_{3,S}$ im Schwerpunktsystem a) auf den Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ (Gl. (3-10)) und b) auf die Energie $E_{3,L}$ (Gl. (3-8)) im Laborsystem auswirkt.) Anstelle der Winkelverteilung wird daher vorzugsweise das leichter zu bestimmende Energiespektrum von Teilchen 3 betrachtet. Eine Messung des Energiespektrums ohne Berücksichtigung des Streuwinkels impliziert allerdings eine Integration über den Azimutwinkel von Teilchen 3. Auf diese Weise kann man – wie in Kap.5 gezeigt wird – die transversale Polarisation des einlaufenden Elektrons nicht mehr bestimmen. Im folgenden ist deshalb vor allem von der Messung der longitudinalen Polarisation die Rede.

Streuung an Protonen und Atomkernen

Sei Teilchen 2 ein Proton, auf das ein Elektron mit der Energie $E_{1,L} = 1 \text{ TeV}$ treffe. Man erhält aus (3-5)

$$s \approx 2 E_{1,L} m_2 \approx (43.3 \text{ GeV})^2,$$

aus (3-11)

$$Q^2 \leq 1.8 \times 10^3 \text{ GeV}^2 \times (1 - \cos \Theta_{3,S}).$$

Das Gleichheitszeichen gilt für elastische Streuung, die Ungleichung für inelastische Streuung unter der Voraussetzung, daß die invariante Masse m_4 der Streuprodukte größer als m_2 ist.

Wenn man diese Zahlen mit der Masse bzw. mit dem Quadrat der Masse des Z^0 vergleicht, sieht man, daß sich Effekte der schwachen Wechselwirkung bei großen Streuwinkeln bemerkbar machen könnten. Allerdings sind in diesem Winkelbereich die Wirkungsquerschnitte klein, sodaß man dort nicht messen wird. Außerdem muß man einschränkend anmerken, daß bei Energien und Impulsüberträgen dieser Größenordnung das Elektron (Positron) nicht mehr am ganzen Proton, sondern bevorzugt an einzelnen Quarks gestreut wird. Die Werte für s und Q^2 sind in dem Fall kleiner. (Gleiches gilt für die Streuung an schweren Atomkernen: Fände die Streuung eines Elektrons am gesamten Atomkern statt, so ließen sich die oben angegebenen Werte für den Energie-Impuls-Übertrag noch übertreffen. Auch hier wechselwirken die hochenergetische Elektronen vor allem mit einzelnen Quarks.) Im folgenden werden deshalb für die Streuung von Elektronen an Kernen keine Effekte der schwachen Wechselwirkung berücksichtigt.

Der Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ des Elektrons bei Elektron-Kern-Streuung ist von der Ordnung $(2m_2 / E_{1,L})^{1/2} \approx 0.043 \text{ rad} = 2.5^\circ$ und experimentell eher auflösbar als im Fall der Elektron-Elektron-Streuung.

3.3.2. Photonentarget

Teilchen 1 sei ein einfallendes Elektron (Positron), Teilchen 2 ein Laserphoton. Der Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ und die Energie $E_{3,L}$ des gestreuten Photons im Laborsystem werden betrachtet.

Energie-Impuls-Erhaltung liefert die Beziehung

$$E_{3,L} = E_{2,L} \frac{E_{1,L} + |\mathbf{p}_{1,L}|}{E_{1,L} - |\mathbf{p}_{1,L}| \cos \Theta_{3,L} + E_{2,L} (1 + \cos \Theta_{3,L})} \quad (3-15)$$

Da $E_{2,L} \ll E_{1,L}$ ist ($E_{1,L} = O(\text{GeV})$, $E_{2,L} = O(\text{eV})$), liegt die Energie $E_{3,L}$ der gestreuten Photonen bei größeren Streuwinkel ($\Theta_{3,L}$ in der Größenordnung von Grad) im eV-Bereich. Bei sehr kleinen Winkeln zwischen der Impulsrichtung des ungestreuten Elektrons und der Flugrichtung des gestreuten Photons jedoch wird der Nenner klein und man erhält hochenergetische rückgestreute γ -Quanten. Das läßt sich am besten durch eine Entwicklung von (3-15) nach Potenzen von $1/\gamma_{1,L} = m_1/E_{1,L}$ zeigen.

Dazu führt man den reduzierten Streuwinkel y ein,

$$y \equiv \Theta_{3,L} \gamma_{1,L} = \Theta_{3,L} E_{1,L}/m_1 \quad (3-16)$$

(y ist der Streuwinkel in Einheiten von $1/\gamma_{1,L}$), und definiert

$$X_f = \frac{4 E_{1,L} E_{2,L}}{m_1^2} \quad (3-17)$$

(der Index "f" steht für frontale ($\equiv$ kollineare) Kollision der Strahlen; in Abschnitt 6.1 wird X für beliebige Einfallrichtungen der Laserphotonen definiert). Aus (3-15) wird

$$E_{3,L} = E_{1,L} \left(\frac{X_f}{1 + X_f + y^2} + O(1/\gamma_{1,L}^2) \right). \quad (3-18)$$

X_f ist für den hier diskutierten Energiebereich von der Größenordnung 1. So bekommt man z.B. für einen Nd-Glas-Laser (Wellenlänge $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, $E_{2,L} = 1.17 \text{ eV}$) und einfallende Elektronen mit $E_{1,L} = 100 \text{ GeV}$ das Ergebnis $X_f = 1.8$. Aus (3-18) entnimmt man, daß die maximale Energie der rückgestreuten γ -Quanten bei $\Theta_{3,L} = 0$ erreicht wird und unter den genannten Verhältnissen bei $0.64 \times E_{1,L}$ liegt.

Hochenergetische γ -Quanten – und das ist der überwiegende Teil der gestreuten Photonen – werden in einen Kegel mit einem Öffnungswinkel von einigen μrad gestreut. Die Verhältnisse aus der Elektron-Elektron-Streuung treten bei Compton-Streuung noch ausgeprägter auf: Die Teilchen werden in einen so kleinen Raumwinkelbereich gestreut, daß eine Auflösung der Winkelverteilung in einem typischen Hochenergie-Detektor nicht möglich ist. Auch im Fall von Compton-Streuung werden daher nur Energiespektren betrachtet und Azimutwinkelverteilungen nicht weiter berücksichtigt.

Für die Schwerpunktennergie und den Energie-Impuls-Übertrag kann man mit Hilfe von (3-17) die Gleichungen

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 (1 + X_f) \quad (3-19)$$

und

$$Q^2 \equiv -(p_2 - p_3)^2 \approx m_1^2 \frac{X_f^2}{1 + X_f + y^2} \quad (3-20)$$

ableiten. Für beide Größen erhält man Zahlenwerte, die sehr viel kleiner als $E_{1,L}^2$ sind. Deshalb erwartet man einen großen Wirkungsquerschnitt.

3.4. Polarisationsgrad des Targets

Protonen-, Elektronen- und Photonentargets lassen sich unterschiedlich stark polarisieren.

Für Photonentargets kann man einen Polarisationsgrad von annähernd 100% erzielen. Mit Hilfe von Reflexion unter dem Brewster-Winkel oder durch Ausnutzen elektro-optischer Effekte läßt sich linear polarisiertes Licht erzeugen. Dieses kann mittels einer Pockels-Zelle in zirkular polarisiertes Licht verwandelt werden [21].

Die Elektronen in der Atomhülle sind weniger stark polarisierbar. So erreicht man z.B. in gesättigtem Eisen nur einen Polarisationsgrad P_e der Elektronen von $P_e \approx 0.08$ [19,31]. (Die Größe P_e stimmt mit dem Polarisationsgrad $s^{(2)}$ des Targets aus (2-111) überein.)

Polarisierte Protonen-Targets kann man heute durch dynamische Kernpolarisation mit einem Polarisationsgrad P_p von bis zu 95% herstellen [32]. Am SLAC wurde für die tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung ein Proton-Target mit $P_p \approx 50 - 60\%$ verwendet [12]. Dabei ist zu beachten, daß in diesen Targets die Wasserstoffatome Teile von Molekülen sind (Butanol in [12]). Nur auf die Protonen aus den Wasserstoffatomen beziehen sich diese Polarisationsangaben. Protonen aus den Kernen der anderen Atome lassen sich nicht polarisieren, aber die Elektronen können an ihnen gestreut werden. Deshalb führt man einen Faktor F ein, der den Bruchteil der Streuprozesse an polarisierten Protonen angibt ($F \approx 0.25$ in [12]). Er verringert den tatsächlichen Polarisationsgrad des Targets:

$$s^{(2)}(\text{Proton}) = F \times P_p \approx 0.10 - 0.15. \quad (3-21)$$

Die Suche nach Materialien mit möglichst hohem Anteil an polarisierbaren Protonen ist Gegenstand umfangreicher Forschungsarbeit (siehe z.B. [33]).

Nach (2-112) geht der Polarisationsgrad $s^{(2)}$ des Targets quadratisch in den Ausdruck für die Effizienz eines Polarimeters ein. Würde sich der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an Photonen nicht vom Wirkungsquerschnitt für die Streuung an polarisierten Elektronen oder Protonen unterscheiden, so wären infolge der besseren Polarisierbarkeit von Photonentargets für eine Polarisationsmessung mittels Compton-Streuung ungefähr 100 mal weniger Probeteilchen erforderlich als bei Anwendung der anderen Analysestreuprozesse.

3.5. Zusammenfassung

Polarisationsmessungen verlangen Analyseprozesse mit möglichst großen Ereignisraten. Das setzt voraus, daß erstens viele Targetteilchen vorhanden sind und zweitens der Wirkungsquerschnitt für den Analyseprozess groß ist.

Die erste Forderung führt dazu, daß nur Streuung an festen Targets oder an Photonen von Hochleistungslasern in Betracht kommt. Die Beiträge der schwachen Wechselwirkung zur Streuung von Elektronen im Energiebereich 1 GeV bis 1 TeV an solchen Targets sind klein. Man kann sich daher auf die Untersuchung von QED-Prozessen beschränken.

Die zweite Forderung nach großen Wirkungsquerschnitten können nur QED-Prozesse von niedriger Ordnung in α erfüllen. Diskutiert werden Effekte der Ordnung α^2 : Paarvernichtungsprozesse sowie die Streuung an verschiedenen Targets (Møller-, Bhabha-, Elektron-Proton-, Compton-Streuung) in niedrigster störungstheoretischer Ordnung.

Nur solche Analyseprozesse sollen diskutiert werden, deren Polarisationsasymmetrien mit existierenden oder geplanten Detektoren meßbar sind. Bei der Streuung hochenergetischer Elektronen an "leichten" Targets (ruhende Elektronen, Laserphotonen) werden die Reaktions-

produkte vorwiegend in einen sehr schmalen Raumwinkelbereich um die Richtung der einfallenden Elektronen emittiert. Winkelverteilungen im Bereich dieser kleinen Streuwinkel lassen sich mit heutigen Mitteln nicht oder nur sehr schwer auflösen. Daher erscheint es sinnvoll, nur die Energiespektren der Reaktionsprodukte zu betrachten, das heißt über die Azimutwinkelverteilung zu integrieren. Es wird sich zeigen, daß man auf diese Weise nur die longitudinale Polarisierung eines Teilchens bestimmen kann (siehe Kap.5 und 6).

4. STREUUNG VON LEPTONEN AN UNPOLARISIERTEN TARGETS

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß sich durch Streuung von Leptonen an beliebigen, aber unpolarisierten Targets keine Rückschlüsse auf die Polarisation hochenergetischer Elektronen ziehen lassen. Betrachtet werden dabei ausschließlich QED-Prozesse. Es zeigt sich nämlich, daß Polarisationsasymmetrien nur in höheren Ordnungen von α auftreten können. Diese sind klein und verschwinden für einfallende hochenergetische Elektronen.

4.1. Struktur des Wirkungsquerschnittes

Die Streuung von Elektronen an unpolarisierten Targets läßt sich mit den Hilfsmitteln aus Abschnitt 2.1 behandeln: D.h. Elektronen (Teilchen 1) fliegen längs der positiven z-Achse des Laborsystems xyz und treffen auf Targetteilchen (Teilchen 2) mit Impulsrichtung entlang der negativen z-Achse. Die lokalen Koordinatensysteme zur Beschreibung der Polarisationsparameter sind Abb. 2-2 zu entnehmen. Die Polarkoordinaten Θ_3 und Φ_3 zur Festlegung der Flugrichtung der auslaufenden Teilchen 3 sind in die Abbn. 2-1 und 2-6 eingetragen.

Die Abhängigkeit des Streuprozesses von der Polarisation der Teilchen im Anfangszustand ist in (2-89) in voller Allgemeinheit angegeben. Die Gleichung vereinfacht sich, wenn die Targetteilchen 2 unpolarisiert sind. Nach der Tabelle im Anschluss an (2-89) bleiben nur Terme übrig, die proportional zu den Tensorkomponenten

$$s_{J_2 0} = t_{J_2 0} \quad \text{mit } J_2 \in A_2$$

sind. Dabei ist die Menge A_2 für masselose Teilchen 2 mit Spin s_2 gegeben durch

$$A_2 = \{0, 2, \dots, 2n\} \text{ mit } n \leq s_2$$

(vgl. (2-70) bis (2-72)). Für massive Targetteilchen ist A_2 unabhängig vom Spin gegeben durch

$$A_2 = \{0\}$$

(vgl. (2-85) und die anschließenden Bemerkungen). Die Mengen A_1 und B_1 für die Projektile (Elektronen, Spin $s = 1/2$) ermittelt man mit Hilfe von (2-85) zu $A_1 = \{0\}$ und $B_1 = \{1\}$. Mit diesen Spezialisierungen wird (2-89) zu

$$|ME|^2_{\text{Norm}} \quad (4-1)$$

$$= 1 + s_{10}^{(1)} \sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2 0} \hat{R}(1, 0; J_2, 0) \\ + 2 s_{11}^{(1)} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\psi_{11}^{(1)} - \phi_3)} \left[\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2 0} \hat{R}(1, 1; J_2, 0) \right] \right\}.$$

Die Bedeutung der Polarisationsparameter $s_{10}^{(1)}$, $s_{11}^{(1)}$ und $\psi_{11}^{(1)}$ der einlaufenden Elektronen erhält man aus einem Vergleich von (2-88) mit (2-49a): $s_{10}^{(1)}$ ist gleich der longitudinalen Polarisation $s_{\parallel}^{(1)}$; für $s_{11}^{(1)}$ gilt

$$s_{11}^{(1)} = -Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} / \sqrt{2},$$

wobei $s_{\perp}^{(1)}$ den Betrag der transversalen Polarisation angibt und $Q^{(1)} = +1$ für Elektronen und $Q^{(1)} = -1$ für Positronen einzusetzen ist; $\psi_{11}^{(1)}$ bezeichnet den Winkel zwischen der transversalen Komponente des Spinvektors und der x-Achse des lokalen Koordinatensystems (vgl. Abb. 2.2).

Die Funktionen $\hat{R}(1, M_1; J_2, 0)$ sind in (2-87) definiert:

$$\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} \hat{R}(1, M_1; J_2, 0) \equiv \frac{\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} R(1, M_1; J_2, 0)}{\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} R(0, 0; J_2, 0)} . \quad (4-2)$$

Die Größen $R(J_1, M_1; J_2, 0)$ ihrerseits setzen sich aus Helizitätsamplituden zusammen. So ist

$$\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} R(0, 0; J_2, 0) \sim \sum_{\substack{\lambda_3 \lambda_4 \\ \lambda_1 \lambda_2}} \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \times \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle^* , \quad (4-3)$$

$$\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} R(1, 1; J_2, 0) \sim \sum_{\substack{\lambda_3 \lambda_4 \\ \lambda_2}} \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | 1/2 \lambda_2 \rangle \times \langle \lambda_3 \lambda_4 | S | -1/2 \lambda_2 \rangle^* . \quad (4-4)$$

Die beiden Gleichungen erhält man aus (2-81), wobei für massive Targets (2-65) und (B-18) und für masselose Targets (2-73) zu verwenden ist. (Bemerkung: Will man den Wirkungsquerschnitt für die Streuung polarisierter Elektronen an unpolarisierten Targets durch Helizitätsamplituden ausdrücken, so läßt sich das einfacher ohne den Umweg über die allgemeine Formel (2-89) erreichen: Man kann Gl. (2-19) für die Dichtematrix von Elektronen direkt in die Gl. (2-28) für $|ME|^2$ einzusetzen. Die Verwendung der Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ ist aber sinnvoll, wenn man mit diesen Größen weiterrechnet, d.h. wenn man die Symmetrieeigenschaften (2-82) bis (2-84) dieser Funktionen direkt ausnützt, ohne sich um ihre explizite Darstellung durch Helizitätsamplituden zu kümmern.)

Da QED-Prozesse die Parität erhalten, kann man (2-83) auf die Funktionen $\hat{R}(1, M_1; J_2, 0)$, $J_2 \in A_2$, anwenden und (4-1) weiter vereinfachen. J_2 als Element aus A_2 ist gerade. Daher gilt

$$\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} \hat{R}(1, M_1; J_2, 0) = - \left[\sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2,0} \hat{R}(1, M_1; J_2, 0) \right]^* \quad (4-5)$$

(vgl. (2-83')). Folglich sind die beiden Summen in (4-1) rein imaginär. Andererseits ist die Linearkombination (4-3) reell (vgl. (2-82) bzw. (2-82')). Damit verschwindet die Abhängigkeit von der longitudinalen Polarisation im Wirkungsquerschnitt (4-1) in allen Ordnungen der Störungstheorie.

Durch Einführen des Vektors $\mathbf{n} = (-\sin\Phi_3, \cos\Phi_3, 0)$ senkrecht zur Streuebene und unter Verwendung des Polarisationsvektors $\mathbf{S}^{(1)} = (S_x^{(1)}, S_y^{(1)}, S_z^{(1)})$ der Teilchen 1 kann man (4-1) die Gestalt

$$\begin{aligned} |\text{ME}|^2_{\text{Norm}} &= 1 + \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{n} \left\{ -\sqrt{2} Q^{(1)} \sum_{J_2 \in A_2} s_{J_2 0} \text{Im } \hat{R}(1, 1; J_2, 0) \right\} \\ &\equiv 1 + \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{n} A_{T0} \end{aligned} \quad (4-6)$$

geben. Diese Form der Abhängigkeit des Streuquerschnittes von der transversalen Polarisation enthält keine Näherungen. Sie gilt in jeder Ordnung der Störungstheorie, falls die Wechselwirkung paritätserhaltend ist.

4.2. Mögliche Polarisationsmessung an unpolarisierten Targets

Die Polarisationsmessung läßt sich anhand der Gleichungen aus Abschnitt 2.2.1 diskutieren. Dazu integriert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} |\text{ME}|^2_{\text{Norm}} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \{ 1 + (S_y^{(1)} \cos\Phi_3 - S_x^{(1)} \sin\Phi_3) A_{T0} \} \quad (4-7)$$

über bestimmte Teilbereiche des Polarwinkels Θ_3 ($\Theta_{\min} \leq \Theta_3 \leq \Theta_{\max}$) und des Azimutwinkels Φ_3 .

Die Streuung in den Azimutwinkelbereich $\phi - \pi/2 \leq \phi_3 \leq \phi + \pi/2$ entspreche der Anordnung "A" aus Abschnitt 2.2.1. Der zugehörige Wirkungsquerschnitt ist durch

$$\sigma_{A(\phi)}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] = 1/2 \sigma_o[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \quad (4-8a)$$

$$\times \{ 1 + (2/\pi)(S_y^{(1)} \cos \phi - S_x^{(1)} \sin \phi) A_{T0}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \}$$

gegeben, mit den Abkürzungen

$$\sigma_o[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\sigma_o}{d\Omega} \sin \Theta_3 d\Theta_3, \quad (4-8b)$$

$$A_{T0}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv \frac{1}{\sigma_o[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]} \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\sigma_o}{d\Omega} A_{T0} \sin \Theta_3 d\Theta_3. \quad (4-8c)$$

In Anordnung "B" werde der Wirkungsquerschnitt für die Streuung in das Intervall $[\phi + \pi/2, \phi + 3\pi/2]$ gemessen (bei unveränderter Θ_3 -Integration). Man erhält $\sigma_{B(\phi)}[\dots]$ aus $\sigma_{A(\phi)}[\dots]$ durch die Substitution $\phi \rightarrow \phi + \pi$.

$$\sigma_{B(\phi)}[\dots] = \sigma_{A(\phi + \pi)}[\dots] = 1/2 \sigma_o[\dots] \times \{ 1 - \dots \}. \quad (4-9)$$

Die Zählraten in den Anordnungen "A" und "B" sind von der Form (2-101) bis (2-103). Für $\phi = -\pi/2$ entspricht dem Polarisationsgrad $s^{(1)}$ der Ausdruck $2S_x^{(1)}/\pi$, für $\phi = 0$ wird $s^{(1)}$ zu $2S_y^{(1)}/\pi$. Durch eine Asymmetriemessung kann man entweder $S_x^{(1)}$ oder $S_y^{(1)}$ bestimmen.

Charakteristisch für die Anzahl der dazu benötigten Teilchen ist nach Abschnitt 2.2.1 der effektive Wirkungsquerschnitt

$$\Sigma[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv 1/2 \sigma_o[\dots] A_{T0}^2[\dots] \quad (4-10)$$

(vgl. (2-112)).

4.3. Näherungen

Zur Diskussion der Polarisationsasymmetrie des Wirkungsquerschnittes (4-6) ist es nützlich, zwei Näherungsausdrücke für den Term $R(1,1; J_2,0)$ anzugeben. Dazu betrachtet man die Teilamplituden der Helizitätsamplituden in (4-4), die durch eine störungstheoretische Entwicklung entstehen.

Streuasymmetrie in Hochenergienäherung

Die einzelnen Teilamplituden setzen sich aus (hier rein elektromagnetischen) Strömen zusammen, die durch Feldquanten (hier Photonen) miteinander wechselwirken. Diese Ströme bestimmen die Polarisationsabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes. Ihre Struktur ist in [16] diskutiert.

Gegeben sei ein Fermionenstrom

$$J(Q', \lambda'; Q, \lambda) \equiv \bar{u}^{(Q')}(\lambda') \Gamma u^{(Q)}(\lambda) . \quad (4-11)$$

Γ steht für eine beliebige Zahl von Gamma-Matrizen, gebildet aus den Gamma-Matrizen der Vertizes und der Propagatoren. $u^{(Q)}$ bezeichnet einen Spinor. Wie bereits in Abschnitt 2.1.1 sind Q und Q' Ladungsindizes: $Q = +1$ beschreibt ein Teilchen, $Q = -1$ ein Antiteilchen.

Verwendet man Hochenergienäherung für einen solchen Strom, d.h. vernachlässigt man im Zähler von (4-11) die Masse des Teilchens

gegenüber den Impulsen, so erhält man Helizitätsauswahlregeln. Für den Fall, daß nur Vektor- und Axialvektorkopplungen an den Vertices auftreten, ist die Anzahl der Gamma-Matrizen in Γ ungerade. Dann verschwindet der Strom $J(Q', \lambda'; Q, \lambda)$ für $Q' = Q$ im Fall $\lambda' = -\lambda$ bzw. für $Q' = -Q$ falls $\lambda' = \lambda$ ist. Diese Auswahlregeln sorgen dafür, daß einige der Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ zu Null werden.

Betrachtet man z.B. elastische Elektron-Proton-Streuung in beliebiger Ordnung, so zieht sich durch jedes Teildigramm eine Elektronenlinie, der Strom $J(1, \lambda' = \lambda_3; 1, \lambda = \lambda_1)$. Nach dem eben gesagten muß in Hochenergienäherung $\lambda_3 = \lambda_1$ sein. Damit verschwindet in jedem Summanden auf der rechten Seite der Gl. (4-4) eine der Helizitätsamplituden. $R(1, 1; J_2, 0)$ wird in dieser Näherung zu Null.

In Streuprozessen mit 2 oder mehr gleichen Teilchen treten Austauschdiagramme auf. Die Ableitung der Auswirkungen von Hochenergienäherung auf die Funktion $R(1, 1; J_2, 0)$ erfordert mehr Aufwand. In Anhang B.4 sind die zu unterscheidenden Fälle diskutiert. Es zeigt sich, daß sowohl für die Streuung eines Elektrons an einem Teilchen anderer Sorte (Gl.(B-62)) als auch für die Streuung an einem anderen Elektron oder an einem Positron (Gl.(B-67))

$$R(1, 1; J_2, 0) = 0 \quad (\text{in HEA}) \quad (4-12)$$

gilt.

Streuasymmetrie in niedrigster Ordnung Störungstheorie

QED-Prozesse sind invariant gegenüber Paritätstransformation und Zeitumkehr. Berechnet man einen Wirkungsquerschnitt in niedrigster Ordnung von α , so ist die Relation (2-84) für die R-Funktionen anwendbar. Man erhält

$$R(1, 1; J_2, 0) = 0 \quad (\text{für } J_2 \text{ gerade in niedrigster Ordnung Störungstheorie}) \quad (4-13)$$

Mithin verschwindet für QED-Prozesse in niedrigster Ordnung die Streuasymmetrie A_{T0} in (4-6) generell. (Dieses Resultat wird gestützt durch die explizite Berechnung der QED-Streuprozesse $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ und $e\mu \rightarrow e\mu$ unter Einschluß einer Wechselwirkung der anomalen magnetischen Momente [34].)

4.4. Nichtstörungstheoretische Lösungen von Potentialstreuproblemen

Berücksichtigt man die Resultate der Hochenergienäherung aus Abschnitt 4.3 für die Streuung an unpolarisierten Targets, dann scheinen solche Streuprozesse wenig geeignet zu sein für die Messung der Polarisation hochenergetischer Elektronen. Dieser Eindruck wird untermauert durch die Diskussion von einigen Lösungen zu Potentialstreuproblemen, welche über die Hochenergienäherung und die niedrigste Ordnung der Störungstheorie hinausgehen.

4.4.1. Mott-Streuung

Gl.(4-6) schließt Potentialstreuung als Grenzfall $m_2 \rightarrow \infty$ ein. Für Mott-Streuung wird in der Literatur [35,19] üblicherweise eine Funktion S_{Sh} (= Sherman-Funktion) definiert,

$$S_{Sh} \equiv -\sqrt{2} Q^{(1)} \operatorname{Im} \hat{R}(1,1; 0,0), \quad (4-14)$$

mit der sich $|ME|_{\text{Norm}}^2$ in der Form

$$|ME|_{\text{Norm}}^2 = 1 + S_n S_{Sh} \quad (4-15)$$

angeben läßt. Einige Autoren haben S_{Sh} in verschiedenen Näherungen und für verschiedene Targets berechnet (siehe dazu die Literaturangaben und Bemerkungen in dem Übersichtsartikel [35]). In erster Bornscher Näherung ist $S_{Sh} \equiv 0$, wie man es auf Grund von (4-13) erwartet.

Für reine Coulomb-Streuung kann man S_{Sh} exakt angeben. Die Funktion zeigt ein schmales Maximum von der Breite $\Delta\theta_{3,L} = O(m_1 / E_{1,L})$ bei sehr großen Streuwinkeln $\theta_{3,L}$ ($\theta_{3,L} \approx 180^\circ$, $\pi - \theta_{3,L} = O(m_1 / E_{1,L})$) [35]. Der Extremwert ist

$$S_{Sh;max} = - \frac{Z\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \pi Z\alpha}} \quad , \quad (4-16)$$

wobei Z die Kernladungszahl bezeichnet. In den anderen Winkelbereichen geht S_{Sh} sehr schnell gegen Null, wenn man die Energie der einfallenden Teilchen erhöht. Man hat dort Übereinstimmung mit der Hochenergienäherung.

Eine Empfindlichkeit bezüglich der Polarisierung der einfallenden Teilchen ist also nur bei Streuung in den engen Winkelbereich um dieses Maximum herum vorhanden. Der Wirkungsquerschnitt hierfür ist sehr klein. Verwendet man für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt den Ausdruck

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,L}} = \frac{Z^2 r_e^2}{4 \pi (E_{1,L}/m_1)^2} \times \frac{1 - \beta_{1,L}^2 \sin^2(\theta_{3,L}/2)}{\sin^4(\theta_{3,L}/2)} \quad (4-17)$$

($r_e = 2.82$ fm ist der klassische Elektronenradius) und entwickelt ihn nach Potenzen von $1/\gamma_{1,L}$, dann kann man den über den Peak der Polarisationsasymmetrie integrierten Wirkungsquerschnitt σ abschätzen durch

$$\sigma = \frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,L}} 2\pi \sin\theta_{3,L} \Delta\theta_{3,L} \approx r_e^2 \frac{5 Z^2}{8 \gamma_{1,L}^6} \quad (4-18)$$

Selbst für $Z = 100$ erhält man bei $E_{1,L} = 1\text{GeV}$ nur einen Wert von $\sigma \approx 8 \times 10^{-15} \text{ mb}$.

Polarisationsmessung durch Mott-Streuung, ein bekanntes Verfahren bei niederenergetischen Elektronen, scheidet für hochenergetische Elektronen also aus.

4.4.2. Bremsstrahlung im Potentialfeld

Wie auf Grund von (4-13) zu erwarten ist, verschwindet die Polarisationsasymmetrie A_{T0} ,

$$A_{T0} \equiv -\sqrt{2} Q^{(1)} \text{ Im } \hat{R}(1,1; 0,0) \quad (4-19)$$

in erster Bornscher Näherung identisch (siehe z.B. [35]). Diese Näherung ist für leichte Kerne ($Z\alpha \ll 1$) und hochenergetische Teilchen zu rechtfertigen.

Für schwere Kerne, $Z\alpha = O(1)$, muß der Einfluß des Potentials in allen Ordnungen von $Z\alpha$ berücksichtigt werden, d.h. für die ein- und auslaufenden Teilchen sind exakte Wellenfunktionen für Teilchen im Kernpotential einzusetzen. Dazu existieren einige Arbeiten (für Referenzen siehe z.B. [35]), welche sich voneinander vor allem durch die Behandlung der Abschirmung des Kernpotentials durch die Hüllenelektronen unterscheiden. Außerdem werden verschiedene Energiebereiche betrachtet. So behandeln Tseng und Pratt [36] die Einteilchenasymmetrie A_{T0} und eine Reihe von Spin-Korrelationen für niederenergetische Elektronen ($5 \text{ keV} - 1 \text{ MeV}$), wobei deren Korrelationsterm C_{20} der Asymmetrie A_{T0} entspricht. Ihre numerisch berechneten Werte für die Funktion A_{T0} sind von der Größenordnung $Z\alpha$. Olsen und Maximon [26] diskutieren die lineare und zirkulare Polarisation der Bremsstrahlung von beliebig polarisierten hochenergetischen Elektronen ($E_{1,L} = O(\text{GeV})$). Ihre Formeln ergeben $A_{T0} = 0$. Auch in nichtstörungstheoretischen

Lösungen verschwindet die Abhängigkeit der Bremsstrahlungsemission von der Polarisation des einfallenden Teilchens mit zunehmender Energie.

4.5. Zusammenfassung :

Polarisationsmessung durch Streuung an unpolarisierten Targets

Streuung an unpolarisierten Targets ist ungeeignet für die Messung der Polarisation hochenergetischer Elektronen (Positronen), denn die Polarisationsasymmetrien für QED - Prozesse sind in diesem Fall sehr klein: Erstens können sie nur von Strahlungskorrekturen stammen (in niedrigster störungstheoretischer Ordnung treten sie nicht auf) und zweitens verschwinden sie in Hochenergienäherung vollständig. Für Mott-Streuung und für Bremsstrahlung eines Elektrons im Potentialfeld eines Kerns wurden diese Aussagen durch die Untersuchung nichtstörungstheoretischer Lösungen bestätigt.

Für Mott-Streuung bleibt in Rückwärtsstreuung ein kleiner Asymmetrie-Peak auch bei großen Energien erhalten. Der Wirkungsquerschnitt an dieser Stelle ist jedoch so klein, daß der Prozess sich für die Polarisationsmessung von hochenergetischen Elektronen nicht ausnützen läßt.

Konsequenz von Kapitel 4 : Zur Bestimmung der Polarisation hochenergetischer Elektronen muß man die Teilchen an polarisierten Targets streuen.

5. POLARISATIONSMESSUNG VON HOCHENERGETISCHEN ELEKTRONEN MITTELS STREUUNG AN POLARISIERTEN MASSIVEN SPIN-1/2-TEILCHEN

Zur Polarisationsanalyse an hochenergetischen Elektronen sind nach Kapitel 4 unpolarisierte Targets nicht geeignet. In dem vorliegenden Kapitel wird die Streuung an polarisierten massiven Spin-1/2-Targets (Protonen, Elektronen) behandelt. Nach Kapitel 3 kann man sich wegen der zu erwartenden Energie- und Impulsüberträge und infolge der Forderung nach großen Ereignisraten auf QED-Prozesse niedrigster Ordnung beschränken.

5.1. Struktur der Wirkungsquerschnitte

Kinematik und Koordinatensysteme zur Beschreibung der Polarisation werden unverändert aus Abschnitt 2.1 übernommen. Die zu analysierenden Elektronen bzw. Positronen (Teilchen 1) fliegen in Richtung der positiven z-Achse des Laborsystems xyz. Sie treffen auf Targetteilchen mit Spin 1/2 (Teilchen 2), die sich vor der Streuung längs der negativen z-Achse bewegen oder im Laborsystem ruhen. Die lokalen Koordinatensysteme zur Beschreibung der Polarisationsparameter der Teilchen 1 und 2 sind in Abb. 2 - 2 dargestellt. (Diese Orientierung des LKS $x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$ soll auch für den Fall eines ruhenden Targets beibehalten werden.) Die Flugrichtung der Streuteilchen 3 ist durch den Polariswinkel θ_3 und den Azimutwinkel ϕ_3 festgelegt (vgl. Abb. 2 - 1).

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung polarisierter Teilchen erhält man durch Multiplikation des unpolarisierten Wirkungsquerschnittes $d\sigma_0/d\Omega_3$ mit dem normierten Betragsquadrat des Matrixelementes.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega_3} \times |ME|^2_{\text{Norm}} \quad (5-1)$$

Die Form von $|ME|^2_{\text{Norm}}$ entnimmt man aus (2-89) durch Spezialisierung auf Spin-1/2-Teilchen. Das Ergebnis ist Gl. (2-61). (Gl. (2-61) wurde in Abschnitt 2.1.1 für Bhabha-Streuung abgeleitet. Da die Ladungsindizes $Q^{(1)}$ und $Q^{(2)}$ noch nicht durch Zahlenwerte ersetzt sind, gilt die Gleichung für beliebige Streuprozesse zweier Spin-1/2-Teilchen. Aus demselben Grund ist die Gültigkeit der zu (2-61) äquivalenten Gln. (2-31) und (2-47) nicht auf Bhabha-Streuung beschränkt.)

QED-Streuprozesse erhalten die Parität. (2-61) vereinfacht sich deshalb mit (2-83) zu

$$\begin{aligned} |ME|^2_{\text{Norm}} = & 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \hat{R}(1,0; 1,0) \\ & + \sqrt{2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \text{Im } \hat{R}(1,1; 0,0) \\ & - \sqrt{2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \text{Re } \hat{R}(1,1; 1,0) \\ & - \sqrt{2} Q^{(2)} s_{\perp}^{(2)} \sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \text{Im } \hat{R}(0,0; 1,1) \\ & - \sqrt{2} s_{\parallel}^{(1)} Q^{(2)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \text{Re } \hat{R}(1,0; 1,1) \\ & + Q^{(1)} Q^{(2)} s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} [\cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \text{Re } \hat{R}(1,1; 1,1) \\ & \quad - \cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \text{Re } \hat{R}(1,1; 1,-1)] \end{aligned} \quad (5-2a)$$

Die Größen

$$\hat{R}(J_1, M_1; J_2, M_2) \equiv \frac{R(J_1, M_1; J_2, M_2)}{R(0,0; 0,0)} \quad (5-2b)$$

sind normierte R-Funktionen. Die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ wiederum setzen sich aus Produkten von Helizitätsamplituden zusammen (vgl. Abschnitt 2.1.1, insbesondere die Gln. (2-54) und (2-55)). Die

Polarisationsparameter $s_{\parallel}^{(i)}$, $s_{\perp}^{(i)}$ und $\psi^{(i)}$ sind in den lokalen Koordinatensystemem der Teilchen definiert (vgl. Abb. 2-2). Es ist $s_{\parallel}^{(i)}$ die longitudinale Polarisation, $s_{\perp}^{(i)}$ der Betrag der transversalen Polarisation und $\psi^{(i)}$ der Winkel zwischen der transversalen Komponente des Polarisationsvektors und der x-Achse des lokalen Koordinatensystems.

In abgekürzter Schreibweise wird (5-2a) zu

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{ME}|_{\text{Norm}}^2 = & 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL} \\
 & + s_{\perp}^{(1)} \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) A_{T0} \\
 & + s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) A_{TL} \\
 & + s_{\perp}^{(2)} \sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) A_{0T} \\
 & + s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) A_{LT} \\
 & + s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} [\cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A_{TT} \\
 & + \cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A_{TT}'] .
 \end{aligned} \tag{5-3}$$

Die Definition der Asymmetriekoeffizienten A_{LL} , A_{T0} , ... (der Index "L" steht für longitudinal, "T" für transversal und "0" für unpolarisiert; der erste Index bezieht sich auf Teilchen 1, der zweite auf Teilchen 2) durch die Funktionen $\hat{R}(J_1, M_1; J_2, M_2)$ entnimmt man aus einem Vergleich von (5-2a) und (5-3). Die Größen A_{LL} , A_{T0} , ... hängen nur vom Polarwinkel Θ_3 ab. Die Abhängigkeit vom Azimutwinkel Φ_3 ist explizit in den Sinus- und Cosinus-Termen enthalten.

In der Literatur werden vielfach Asymmetriegrößen C_{SS} , C_{NS} , etc. angegeben [37]. Sie entstehen, wenn man die Polarisationsparameter der Teilchen im Anfangszustand auf spezielle Koordinatensysteme $\tilde{x}^{(i)} \tilde{y}^{(i)} \tilde{z}^{(i)}$ bezieht. Diese entstehen durch Drehung der lokalen Koordinatensysteme $x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$ aus Abb. 2-2 um die z-Achse des Laborsystems mit Drehwinkel Φ_3 . Die Achsen $\tilde{x}^{(i)}$ liegen daher in der Streuebene, die Achsen $\tilde{y}^{(i)}$ stehen senkrecht auf ihr. Bezeichnet man nun die Kompo-

nenten der Polarisationsvektoren $\mathbf{S}^{(i)}$ bezüglich $\tilde{x}^{(i)}$, $\tilde{y}^{(i)}$ und $\tilde{z}^{(i)}$ mit den Indizes S (für transversale Polarisation in der Streuebene), N (für transversale Polarisation normal zur Streuebene) und L (für longitudinale Polarisation), dann kann man für (5-3) schreiben

$$|ME|_{\text{Norm}}^2 = 1 + \sum_{\alpha=S,N,L} S_{\alpha}^{(1)} P_{\alpha}^{(1)} + \sum_{\alpha=S,N,L} S_{\alpha}^{(2)} P_{\alpha}^{(2)} + \sum_{\alpha,\beta=S,N,L} S_{\alpha}^{(1)} S_{\beta}^{(2)} C_{\alpha\beta}.$$

Die nichtverschwindenden Asymmetriekoeffizienten $P_{\alpha}^{(1)}$, $P_{\alpha}^{(2)}$ und $C_{\alpha\beta}$ lassen sich durch die Koeffizienten A_{ik} aus (5-3) ausdrücken und umgekehrt. Setzt man $\Phi_3 = 0$ und beachtet, daß transversale Polarisation in der Streuebene durch den Winkel $\psi = 0$ und senkrecht zur Streuebene durch den Winkel $\psi = \pi/2$ beschrieben wird, dann erhält man aus (5-3) die Beziehungen

$$\begin{aligned} P_N^{(1)} &= -A_{T0}, \\ P_N^{(2)} &= A_{0T}, \\ C_{LL} &= A_{LL}, \\ C_{LS} &= A_{LT}, \\ C_{SL} &= A_{TL}, \\ C_{NN} &= A_{TT} - A'_{TT}, \\ C_{SS} &= A_{TT} + A'_{TT}. \end{aligned}$$

5.2. Mögliche Polarisationsmessungen

Die Hilfsmittel aus Abschnitt 2.2.1 werden verwendet, um das Vorgehen bei einer Polarisationsmessung zu beschreiben. Es sind mehrere Fälle zu

unterscheiden.

5.2.1. Messung azimutwinkelunabhängiger Streuasymmetrien

Integriert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus (5-3) über den gesamten Azimutwinkel von 0 bis 2π , so bleiben nur die Terme proportional zu A_{LL} und A_{TT}' übrig.

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_3} = \frac{d\sigma_o}{d\cos\theta_3} \times \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL} + s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A_{TT}' \right\}. \quad (5-4)$$

Fall a : Bestimmung der longitudinalen Polarisation

Ein Target mit rein longitudinaler Polarisation ($s_{\perp}^{(2)} = 0$) eliminiert die Asymmetrie proportional zu A_{TT}' . Integration über den Streuwinkelbereich $\theta_{\min} < \theta_3 < \theta_{\max}$ ergibt den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma[\theta_{\min}, \theta_{\max}] = \sigma_o[\theta_{\min}, \theta_{\max}] \times \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\theta_{\min}, \theta_{\max}] \right\}. \quad (5-5a)$$

Die einzelnen Größen sind wie folgt definiert:

$$\sigma_o[\theta_{\min}, \theta_{\max}] \equiv 2\pi \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\sigma_o}{d\cos\theta_3} \sin\theta_3 d\theta_3, \quad (5-5b)$$

$$A_{LL}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv \frac{2\pi}{\sigma_o[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]} \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\sigma_o}{d\cos\Theta_3} A_{LL} \sin\Theta_3 d\Theta_3 . \quad (5-5c)$$

Gl. (5-5a) hat dieselbe Form wie der Wirkungsquerschnitt in (2-101), wobei $s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\dots]$ der Analysierstärke P_A entspricht. Ein polarisiertes Target mit Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(2)}$ kann mit der Anordnung "A" aus Abschnitt 2.2.1 identifiziert werden. Durch Umlappen der longitudinalen Polarisation des Targets von $s_{\parallel}^{(2)}$ nach $-s_{\parallel}^{(2)}$ erhält man die Anordnung "B". Aus der Anzahl der registrierten Streueignisse N_A und N_B läßt sich die Zählraten-Asymmetrie

$$A_m \equiv \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B} = s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \quad (5-6)$$

ermitteln (vgl. (2-104)). Aus ihr kann bei bekannter Targetpolarisation der Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(1)}$ der Elektronen berechnet werden. Die Anzahl der Teilchen, die man zur Polarisationsmessung benötigt, läßt sich mit (2-113) abschätzen. Charakteristisch hierfür ist die Größe Σ_{LL} (sie entspricht Σ aus (2-112)). Σ_{LL} hängt vom Phasenraum der Streuteilchen ab und ist gegeben durch

$$\Sigma_{LL}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{LL}^2[\dots] . \quad (5-7)$$

Fall b : Bestimmung der transversalen Polarisation

Ein transversal polarisiertes Target ($s_{\parallel}^{(2)} = 0$) eliminiert die Asymmetrie proportional zu A_{LL} in (5-4). Nach Integration über Θ_3 erhält man den Wirkungsquerschnitt in der Form

$$\sigma [\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] = \sigma_o [\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \quad (5-8)$$

$$\times \{ 1 + s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A'_{TT} [\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \}.$$

$\sigma_o [\dots]$ und $A'_{TT} [\dots]$ sind analog zu (5-5b) und (5-5c) definiert ($A_{LL} \rightarrow A'_{TT}$).

Setzt man die Identität

$$s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \quad (5-9)$$

$$= s_{\perp}^{(1)} \cos\psi^{(1)} [s_{\perp}^{(2)} \cos\psi^{(2)}] + s_{\perp}^{(1)} \sin\psi^{(1)} [-s_{\perp}^{(2)} \sin\psi^{(2)}]$$

in den Ausdruck (5-8) ein, so zeigt sich folgendes: Der Polarisationsparameter $s_{\perp}^{(1)} \cos\psi^{(1)} = S_x^{(1)}$ kann gemessen werden, indem man zuerst $\psi^{(2)} = 0$ (Anordnung "A") und danach $\psi^{(2)} = \pi$ (Anordnung "B") setzt - in vollständiger Analogie zum Vorgehen bei der Bestimmung der longitudinalen Polarisation $s_{\parallel}^{(1)}$ (Fall a); die Größe $s_{\perp}^{(1)} \sin\psi^{(1)} = S_y^{(1)}$ erhält man, wenn man den Polarisationsvektor des Targets so orientiert, daß er in Anordnung "A" einen Winkel $\psi^{(2)} = 3\pi/4$ und in Anordnung "B" einen Winkel $\psi^{(2)} = \pi/4$ mit der x-Achse des lokalen Koordinatensystems bildet. (Leider wird sich herausstellen, daß A'_{TT} für hochenergetische Elektronen verschwindet. Das ist für beliebige QED-Streuprozesse in Anhang B.4 gezeigt (siehe die Gln. (B-62) und (B-67)). Die expliziten Formeln für die Polarisationsasymmetrien einiger spezieller Streuprozesse an späterer Stelle in dem vorliegenden Kapitel stützen diese allgemeine Aussage.)

5.2.2. Messung azimutwinkelabhängiger Streuasymmetrien

Wenn man Φ_3 nur über bestimmte Teile des zulässigen Azimutwinkelbereiches integriert, lassen sich Beiträge von Termen proportional zu den Asymmetriekoeffizienten A_{TT} , A_{LT} , etc. im Wirkungsquerschnitt

(5-3) ermitteln.

Die Zahlenbeispiele in Abschnitt 3.3 zeigen, daß die Streuwinkel sehr klein sind, wenn man Elektronen im GeV-Bereich auf ruhende Targets schießt. Deshalb ist die Azimutwinkelverteilung der Streuprodukte experimentell schwer zu erfassen und wird nur am Rande diskutiert. Dennoch soll gezeigt werden, wie sich die Bestimmung von Azimutwinkelverteilungen zur Polarisationsmessung ausnutzen läßt und wie die Effizienz solcher Messungen mit Hilfe der Methode aus Abschnitt 2.2.1 beurteilt werden kann.

Wegen der unterschiedlichen Abhängigkeit der einzelnen Terme vom Azimutwinkel Φ_3 sind 2 Fälle zu unterscheiden.

Fall a : Bestimmung der transversalen Polarisation

Es sei ein Streuprozess vom Typ (5-3) mit $A_{TT} \neq 0$ und $A'_{TT} = 0$ gegeben. (Die Annahme $A'_{TT} = 0$ läßt sich durch das Verschwinden von A_{TT} in Hochenergienäherung begründen (siehe Anhang B.4).) Die Größe der anderen Asymmetriekoeffizienten A_{LL} , A_{T0} , etc. ist beliebig. Ferner sei das Target transversal polarisiert ($s_{\parallel}^{(2)} = 0$). Der Azimutwinkelbereich $0 \leq \Phi_3 < 2\pi$ werde in 4 gleich große Segmente

$$S_n(\phi) = \{ \phi + \pi/2 (n - 3/2) \leq \Phi_3 \leq \phi + \pi/2 (n - 1/2) \} \quad (5-10)$$

mit $n = 1, \dots, 4$ aufgeteilt, wobei ϕ ein vorerst unbestimmter Winkel ist (vgl. Abb. 5 - 1).

Anordnung "A" ist dadurch festgelegt, daß die Streuteilchen in den Segmenten $S_1(\phi)$ und $S_3(\phi)$ registriert werden. Entsprechend zählt man in Anordnung "B" Teilchen in $S_2(\phi)$ und $S_4(\phi)$. Auf Grund der Periodizität der Winkelfunktionen heben sich in jeder der Anordnungen die Beiträge proportional zu A_{T0} , A_{TL} , A_{0T} und A_{LT} heraus. Infolge der Annahmen $A'_{TT} = 0$ und $s_{\parallel}^{(2)} = 0$ bleibt nur der Term A_{TT} übrig. man erhält durch Integration von (5-3) für den Analysiervorgang "A" den Streuquerschnitt

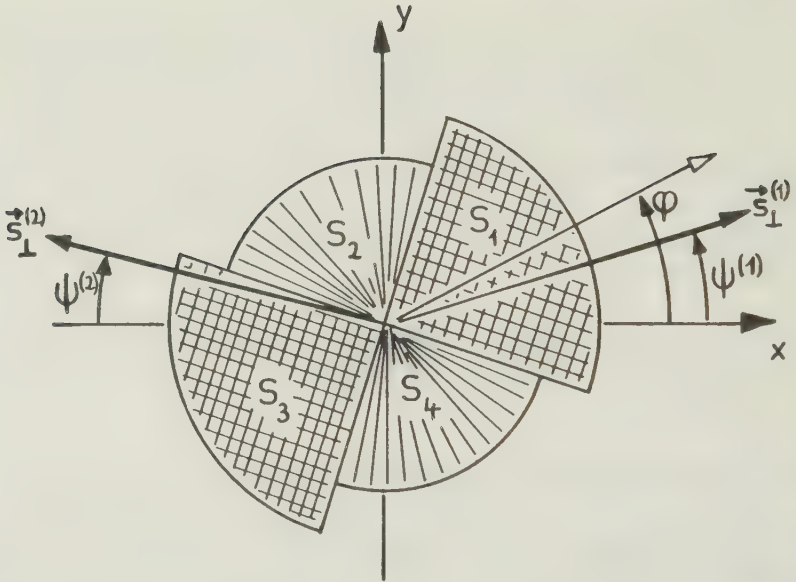


Abb. 5 - 1 : Definition der vier Segmente $S_1(\phi)$, ..., $S_4(\phi)$ zur Messung der transversalen Polarisation aus der Azimutwinkelverteilung der Streuprodukte. Die Winkel $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ legen die Richtung der transversalen Polarisation von Projektil und Target fest.

$$\sigma_{A(\phi)}[\theta_{\min}, \theta_{\max}] \quad (5-11)$$

$$= 1/2 \sigma_o[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$$

$$\times \{ 1 + (2/\pi) s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(2\phi - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A_{TT}[\theta_{\min}, \theta_{\max}] \}.$$

Die Funktion $\sigma_o[\dots]$ ist in (5-5b) definiert. Die integrierte Asymmetrie $A_{TT}[\dots]$ erhält man aus (5-5c) durch die Ersetzung $A_{LL} \rightarrow A_{TT}$.

Der Wirkungsquerschnitt für die Segmente S_2 und S_4 (Einstellung "B") geht aus (5-11) durch die Substitution $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ hervor.

$$\begin{aligned}\sigma_{B(\phi)}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] &= \sigma_{A(\phi + \pi/2)}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \\ &= 1/2 \sigma_o[\dots] \{ 1 - (2/\pi) \dots \} .\end{aligned}\quad (5-12)$$

Die größte Analysierstärke erhält man für

$$2\phi - \psi^{(1)} + \psi^{(2)} = 0 \text{ oder } \pi . \quad (5-13)$$

In dem Fall zeigt ϕ in die Richtung der Winkelhalbierenden zwischen den transversalen Polarisationsvektoren $\mathbf{s}_\perp^{(1)}$ und $\mathbf{s}_\perp^{(2)}$. Die Cosinus-Funktion in (5-11) und (5-12) nimmt die Werte $+1$ bzw. -1 an.

Damit man die Targetpolarisation $\mathbf{s}_\perp^{(2)}$ und den Winkel ϕ gemäß (5-13) einstellen kann, muß man bereits die Richtung $\psi^{(1)}$ des Vektors $\mathbf{s}_\perp^{(1)}$ der transversalen Polarisation kennen. Falls $\psi^{(1)}$ unbekannt ist, sind Messungen bei zwei verschiedenen Werten von ϕ durchführen, denn der effektive Polarisationsparameter

$$\begin{aligned}s_{\perp, \text{eff}}^{(1)} &\equiv (2/\pi) s_\perp^{(1)} \cos(2\phi - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \\ &= (2/\pi) s_\perp^{(1)} \cos\psi^{(1)} \cos(2\phi + \psi^{(2)}) + (2/\pi) s_\perp^{(1)} \sin\psi^{(1)} \sin(2\phi + \psi^{(2)})\end{aligned}\quad (5-14)$$

enthält zwei unbekannte Größen. Wählt man $\phi = -\psi^{(2)}/2$, so wird $s_\perp^{(1)} \cos\psi^{(1)} = S_x^{(1)}$ bestimmt; für $\phi = \pi/4 - \psi^{(2)}/2$ erhält man $s_\perp^{(1)} \sin\psi^{(1)} = S_y^{(1)}$.

Als Maß für die Effizienz der Anordnung wird analog zu (2-112) der effektive Wirkungsquerschnitt

$$\Sigma_{TT}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv 1/2 \sigma_o[\dots] \times A_{TT}^2[\dots] \quad (5-15)$$

mit $\sigma_o[\dots]$ aus (5-5b) und $A_{TT}[\dots]$ aus (5-5c) verwendet.

Fall b : Bestimmung der longitudinalen Polarisation

Es sei $A_{LT} \neq 0$ in (5-3). Die Asymmetriekoeffizienten A_{TT} , A_{T0} und A_{0T} sollen der Einfachheit halber verschwinden. Die restlichen Asymmetriekoeffizienten dürfen beliebige Werte annehmen. Das Target werde transversal polarisiert ($s_{\parallel}^{(2)} = 0$) und der Azimutwinkelbereich in 2 gleich große Hälften aufgeteilt (s. Abb. 5 - 2).

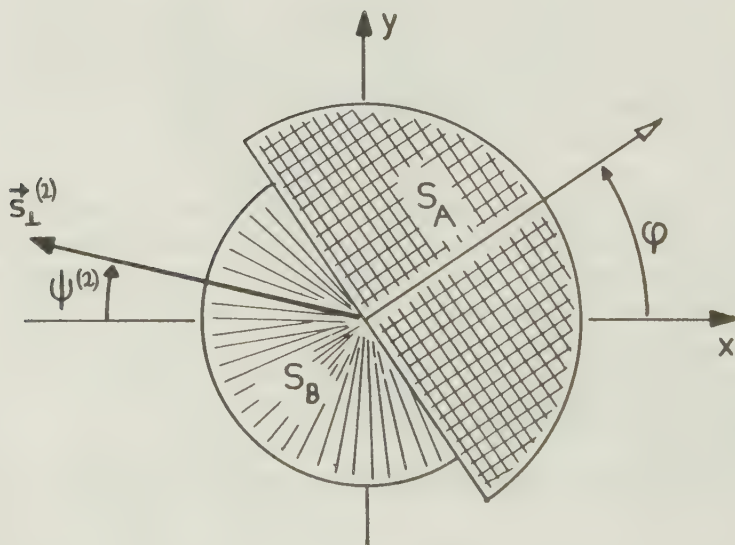


Abb. 5 - 2 : Unterteilung des Azimutwinkelbereiches zur Messung der longitudinalen Polarisation mit Hilfe der Polarisationsasymmetrie proportional zu A_{LT} . Der Winkel $\psi^{(2)}$ beschreibt die Richtung der transversalen Polarisation des Targets.

In der Einstellung "A" registriert man diejenigen Teilchen, welche in den Azimutwinkelbereich

$$S_A \equiv \{ \phi - \pi/2 \leq \Phi_3 \leq \phi + \pi/2 \} \quad (5-16a)$$

gestreut werden. In Anordnung "B" zählt man die Teilchen in dem Segment

$$S_B \equiv \{ \phi + \pi/2 \leq \Phi_3 \leq \phi + 3\pi/2 \} . \quad (5-16b)$$

Bei Integration des Wirkungsquerschnittes über S_A bzw. S_B verschwinden alle Asymmetrien mit Ausnahme von A_{LT} . Integriert man ferner über Θ_3 , so erhält man

$$\sigma_{A(\phi)}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \quad (5-17a)$$

$$= 1/2 \sigma_o[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$$

$$\times \{ 1 + (2/\pi) s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\phi + \psi^{(2)}) A_{LT}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \},$$

$$\sigma_{B(\phi)}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] = \sigma_{A(\phi + \pi)}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \quad (5-17b)$$

$$= 1/2 \sigma_o[\dots] \{ 1 - (2/\pi) \dots \}.$$

Die Definition von $\sigma_o[\dots]$ ist der Gl. (5-5b), diejenige von $A_{LT}[\dots]$ der Gl. (5-5c) zu entnehmen (Index "LL" → "LT"). Die größten Werte für die Asymmetrie A_m (vgl. (5-6)) erzielt man für $\phi + \psi^{(2)} = 0$ oder π . Aus A_m läßt sich $s_{\parallel}^{(1)}$ berechnen.

Zur Beurteilung der Effektivität der Polarisationsmessung bildet man – wie in den vorangegangenen Fällen – die charakteristische Größe

$$\Sigma_{LT}[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] \equiv 1/2 \sigma_o[\dots] \times A_{LT}^2[\dots]. \quad (5-18)$$

5.3. Energiespektren

In Abschnitt 3.3.1 wurde gezeigt, daß die Streuwinkel der Reaktionsprodukte aus der Streuung von Elektronen (Teilchen 1) an ruhenden Targetteilchen (Teilchen 2) von der Größenordnung $1/\gamma_{2,S} = (2m_2 / E_{1,L})^{1/2}$ sind (siehe (3-10) mit (3-6) und (3-3)). Um die Messung dieser kleinen Winkel zu umgehen, wurde vorgeschlagen, statt der Winkelverteilungen Energiespektren zu bestimmen.

Falls der Endzustand nur aus zwei Teilchen besteht, kann man das Energiespektrum leicht aus der Winkelverteilung der Streuprodukte im Schwerpunktsystem erhalten. Bei fester Einschußenergie sind der Betrag des Impulses $p_{3,S}$ und die Energie $E_{3,S}$ des Streuteilchens im Schwerpunktsystem winkelnunabhängig. Die Energie $E_{3,L}$ im Laborsystem hängt infolge der Lorentz-Transformation vom Polarwinkel $\Theta_{3,S}$ im Schwerpunktsystem ab. Nach (3-7) besteht zwischen $\cos\Theta_{3,S}$ und $E_{3,L}$ ein linearer Zusammenhang. Daraus erhält man

$$\frac{d\cos\Theta_{3,S}}{dE_{3,L}} = \frac{1}{|p_{3,S}| \sqrt{\gamma_{2,S}^2 - 1}} \quad (5-19)$$

Somit stimmt das Energiespektrum im Laborsystem bis auf eine Konstante mit der Winkelverteilung im Schwerpunktsystem überein:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\phi_3 dE_{3,L}} &= \frac{d\sigma}{d\phi_3 d\cos\Theta_{3,S}} \times \frac{d\cos\Theta_{3,S}}{dE_{3,L}} \\ &= \frac{1}{|p_{3,S}| \sqrt{\gamma_{2,S}^2 - 1}} \frac{d\sigma}{d\Omega_{3,S}} \end{aligned} \quad (5-20)$$

Dabei ist $\gamma_{2,S}$ nach (3-6) und (3-3) gegeben durch

$$\gamma_{2,S} = \gamma_{CM,L} = \frac{E_{1,L} + E_{2,L}}{\sqrt{s}}$$

Für alle Prozesse in Kap.5 mit 2 Teilchen im Endzustand wird der Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem als Funktion von $\cos\Theta_{3,S}$ angegeben. Das Energiespektrum im Laborsystem erhält man daraus durch Umskalieren der Koordinatenachsen, wobei im einzelnen folgende Änderungen vorzunehmen sind:

a) Der Abszissenwert $\cos\Theta_{3,S} = +1$ geht über in die maximale Energie $E_{3,L;\max}$ des Streuteilchens 3 im Laborsystem. Entsprechend wird aus $\cos\Theta_{3,S} = -1$ die minimale Teilchenenergie $E_{3,L;\min}$. Mit (3-7) erhält man

$$\begin{aligned} E_{3,L;\max} &= E_{3,S} \gamma_{2,S} + |\mathbf{p}_{3,S}| \sqrt{\gamma_{2,S}^2 - 1}, \\ E_{3,L;\min} &= E_{3,S} \gamma_{2,S} - |\mathbf{p}_{3,S}| \sqrt{\gamma_{2,S}^2 - 1}. \end{aligned} \quad (5-21)$$

Die Energien $E_{3,L;\min}$ und $E_{3,L;\max}$ bilden die Endpunkte der Skala für die Energie $E_{3,L}$ im Laborsystem. Die Zwischenwerte werden bestimmt, indem man jedem Wert von $\cos\Theta_{3,S}$ mit Hilfe von Gl. (3-7) eine Energie zuordnet. Wegen des linearen Zusammenhanges zwischen $\cos\Theta_{3,S}$ und $E_{3,L}$ ist diese Energieskala linear (falls die Werte für $\cos\Theta_{3,S}$ linear aufgetragen sind).

b) Bei der Umskalierung der Ordinate sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Falls das Diagramm die differentiellen Winkelverteilung im Schwerpunktsystem zeigt, so erhält man das Energiespektrum durch Änderung der Achsenbeschriftung gemäß (5-20):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{3,S}} \rightarrow |\mathbf{p}_{3,S}| \sqrt{\gamma_{2,S}^2 - 1} \frac{d\sigma}{d\Omega_3 dE_{3,L}}$$

2) Sind in der Abbildung integrierte Größen als Funktion der Integrationsgrenze aufgetragen (werden beispielsweise die in Abschnitt 5.2 definierten Größen $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 90^\circ]$ und $\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 90^\circ]$ abgebildet), so ist keine Skalenänderung vorzunehmen. Man hat nur die Winkel in den Funktionsargumenten durch die entsprechenden Energien im Laborsystem zu ersetzen (vgl. Punkt a)).

5.4. Analyse der polarisationsabhängigen Wirkungsquerschnitte von folgenden Reaktionen:

5.4.1. Paarvernichtungsprozesse

Betrachtet werden in diesem Abschnitt paritätserhaltende Prozesse, bei denen ein hochenergetisches Positron (Teilchen 1) auf ein im Laborsystem ruhendes Elektron (Teilchen 2) trifft. Die beiden Teilchen sollen sich vernichten, der Endzustand soll also frei von Elektronen und Positronen sein. In Abb. 5-3 sind auf der rechten Seite der graphischen Gleichung einige Diagramme angegeben, die zur störungstheoretischen Entwicklung der Helizitätsamplitude beitragen. Ihnen ist gemeinsam, daß die beiden einlaufenden Teilchen durch eine Elektronenlinie miteinander verbunden sind.

Ohne weitere Spezialisierung hat das Betragsquadrat des Matrixelementes für Prozesse dieser Art die Form (5-2a) bzw. (5-3). Zusätzliche Annahmen vereinfachen den Wirkungsquerschnitt. Beschränkt man sich erstens auf Diagramme, in denen der Fermionenstrom zwischen den einlaufenden Teilchen nur an Photonen koppelt, und verwendet man zweitens Hochenergienäherung für diesen Fermionenstrom (d.h. in den

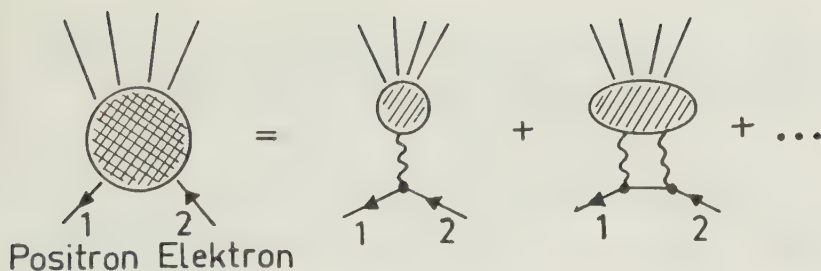


Abb. 5 - 3 : Zerlegung der Helizitätsamplitude für Paarvernichtung in Teilamplituden im Rahmen der Störungstheorie.

Propagatoren wird die Elektronenmasse gegenüber den Impulsen vernachlässigt), so verschwinden mit Ausnahme von A_{LL} und A_{TT} sämtliche Asymmetriekoeffizienten in (5-3) und A_{LL} nimmt den Wert

$$A_{LL} = -1 \quad (5-22)$$

an. Die Aussagen beruhen auf Helizitätseigenschaften der Fermionenströme [16] und sind in Anhang B.4.1 abgeleitet. Für den Wirkungsquerschnitt (5-1) erhält man damit den Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left\{ 1 - s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} + s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A_{TT} \right\} \quad (5-23)$$

Die Energiebilanz schränkt die in Frage kommenden Paarvernichtungsprozesse ein. Teilchen 2 ruht im Laborsystem, sodaß die Gesamtenergie $\sqrt{s}$ im Schwerpunktsystem sich mit Hilfe von (3-5) durch die Energie $E_{1,L}$ des Positrons im Laborsystem ausdrücken lässt. Mit $m_1 = m_2$ erhält man

$$s = 2 m_1 (E_{1,L} + m_1) \approx 2 m_1 E_{1,L} \quad (5-24)$$

In Tab. 5 - 1 ist die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem für verschiedene Einfallenergien $E_{1,L}$ angegeben. Man sieht, daß in dem Energiebereich $E_{1,L} \leq 1$ TeV keine Baryonen erzeugt werden können.

$E_{1,L} / \text{GeV}$		$\sqrt{s} / \text{GeV}$	s / GeV^2
1.		0.032	0.001024
10.		0.0101	0.01022
17.75	$m_{\pi^0} =$	0.13469	0.01814
43.69	$2 m_{\mu} = 2 \times$	0.10566	0.04466
76.24	$2 m_{\pi^+} = 2 \times$	0.13957	0.07792
100.		0.320	0.1024
586.	$m_p =$	0.774	0.5991
1000.		1.011	1.022

Tab. 5 - 1 : Gesamtenergie $\sqrt{s}$ im Schwerpunktsystem für den Fall, daß ein Positron mit der Energie $E_{1,L}$ auf ein ruhendes Elektron trifft.

Von den kinematisch zulässigen Prozessen mit nichthadronischem Endzustand werden die Erzeugung eines $\mu^+ - \mu^-$ -Paares und die Paarvernichtung in zwei γ -Quanten detailliert behandelt. Die Wirkungsquerschnitte für diese Prozesse sind wohlbekannt und lassen sich an verschiedenen Stellen in der Literatur finden (z.B. [38,39,40,25]).

Elektron-Positron-Paarvernichtung mit hadronischem Endzustand wird nur anhand des Beispiels $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ausführlicher besprochen. Auch hierfür ist der Wirkungsquerschnitt an mehreren Stellen in der Literatur angegeben (z.B. [38,39,25]).

Es erübrigt sich, weitere Prozesse mit Hadronen im Endzustand genauer zu betrachten, denn man kann ihre Eignung zur Messung der longitudinalen Polarisation mit Hilfe der Resultate aus der $\mu^+ - \mu^-$ -Paarerzeugung abschätzen. In dem betrachteten Energiebereich werden Hadronen bevorzugt durch den Zerfall eines virtuellen Photons

gebildet (1. Term auf der rechten Seite von Abb. 5 - 4). Der Wirkungsquerschnitt in Hochenergienäherung ist von der Form (5-23). Wegen $A_{LL} = -1$, fällt der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\dots]$ zusammen mit dem integrierten unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\dots]$ (vgl. die Definitionsgleichungen (5-7) und (5-5a)). $\Sigma_{LL}[\dots]$ nimmt somit einen Maximalwert an, wenn man über den gesamten Phasenraum der Streuteilchen integriert.

$$\Sigma_{LL,max} = \sigma_{o,tot} \quad (5-25a)$$

$\sigma_{o,tot}$ bezeichnet den unpolarisierten totalen Wirkungsquerschnitt. (5-25a) ist zunächst für jeden einzelnen hadronischen Erzeugungsprozess richtig. Die Beziehung bleibt gültig, wenn man verschiedenen Prozesse inkohärent zum inklusiven Wirkungsquerschnitt $\sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ für die Erzeugung von Hadronen aufaddiert. Üblicherweise gibt man diesen Wirkungsquerschnitt in Einheiten des Wirkungsquerschnittes für die Erzeugung eines $\mu^+ \mu^-$ -Paares an und bezeichnet das Verhältnis aus $\sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ und $\sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ mit R [41]. Damit gilt

$$\Sigma_{LL,max} \leq \sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \text{Hadr.}) = R \sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-). \quad (5-25b)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ ist in (5-27) angegeben. Der Faktor R zeigt für die zur Diskussion stehenden Energien ein ausgeprägtes Resonanzverhalten, denn die Gesamtenergie $\sqrt{s}$ im Schwerpunktsystem liegt im Bereich der Massen der Vektormesonen ρ , ω und ϕ (siehe Tab. 5 - 1). Abseits der Resonanzen ist R von der Größenordnung 1 (siehe z.B. [41]).

Transversale Polarisation läßt sich durch Messung des totalen Wirkungsquerschnittes nicht bestimmen, da nach (5-23) die Abhängigkeit von $s_{\perp}^{(1)}$ durch die Integration über Φ_3 verschwindet. Jedoch kann (5-25b) mit der Ersetzung $\Sigma_{LL} \rightarrow \Sigma_{TT}$ als obere Grenze für den effektiven Wirkungsquerschnitt Σ_{TT} aus (5-15) verwendet werden.

5.4.1.1. $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den 1γ -Vernichtungsprozess im Schwerpunktsystem ist - in Hochenergienäherung für die einfallenden Teilchen - durch (5-23) gegeben. Der explizite Ausdruck für $d\sigma_o/d\Omega_{3,S}$ und A_{TT} lautet (siehe z.B. [38,39,25])

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,S}} = r_e^2 \beta_{3,S} \frac{m_1^2}{4s} \left(1 + \cos^2\Theta_{3,S} + \frac{4m_3^2}{s} \sin^2\Theta_{3,S} \right), \quad (5-26a)$$

$$A_{TT} = - \frac{(1 - 4m_3^2/s) \sin^2\Theta_{3,S}}{1 + \cos^2\Theta_{3,S} + (4m_3^2/s) \sin^2\Theta_{3,S}}. \quad (5-26b)$$

Dabei ist m_1 die Elektronenmasse, m_3 die Masse des Myons, $\beta_{3,S} = p_{3,S}/E_{3,S}$ die Geschwindigkeit des Myons im Schwerpunktsystem (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit), s das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem und $r_e = 2.82$ fm der klassische Elektronenradius. Wie man aus Tab. 5-1 entnehmen kann, muß die Energie $E_{1,L}$ des Positron im Laborsystem größer als ca. 44 GeV sein, damit Myon-Paarerzeugung an ruhenden Targetelektronen energetisch möglich ist.

Die Funktionen (5-26a) und (5-26b) sind in den Abbn. 5-4a und 5-4b für die Anfangsenergien $E_{1,L} = 50, 100, 500$ und 1000 GeV graphisch dargestellt. In Abb. 5-4a ist der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels im Schwerpunktsystem aufgetragen. Er weist bei den betrachteten Energien, die in der Nähe der Erzeugungsschwelle liegen, nur eine schwache Winkelabhängigkeit auf. Der transversale Asymmetriekoeffizient A_{TT} in Abb. 5-4b nimmt mit der Energie der einfallenden Teilchen zu und ist maximal für 90° -Streueung.

Um die Effizienz des Prozesses für die Messung der longitudinalen Polarisation zu bestimmen, wurde (5-26a) ausgehend von dem festen

Grenzwinkel $\Theta_{3,S} = 180^\circ$ numerisch bis zu dem Polarwinkel $\Theta_{3,S}$ integriert. Das Ergebnis $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ (vgl. Gl. (5-5b)) ist in Abb. 5-4c als Funktion von $\cos\Theta_{3,S}$ aufgetragen. Wegen $A_{LL} = -1$ gilt $\sigma_o[\dots] = \Sigma_{LL}[\dots]$, wobei $\Sigma_{LL}[\dots]$ durch (5-7) mit (5-5b) und (5-5c) definiert ist. Abb. 5-4c zeigt, daß der effektive Wirkungsquerschnitt Σ_{LL} monoton mit der Größe des Integrationsintervalles wächst. Die für eine Messung der longitudinalen Polarisation empfindlichste Anordnung erhält man somit, wenn man die Zählratenasymmetrie des totalen Wirkungsquerschnittes bestimmt.

$$\Sigma_{LL,max} = \sigma_{o,tot}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \beta_{3,S} \left(1 + \frac{2 m_3^2}{s} \right). \quad (5-27)$$

$\Sigma_{LL,max} = \sigma_{o,tot}$ ist von der Größenordnung 10^{-4} mb. (Es sei daran erinnert, daß man $\Sigma_{LL,max}$ aus (5-27) nach Multiplikation mit dem Faktor R als Abschätzung des effektiven Wirkungsquerschnittes für Prozesse der Form $e^+ e^- \rightarrow$ Hadronen verwenden kann (vgl. (5-25b).)

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man die transversale Polarisation von Positronen aus der Azimutwinkelverteilung der erzeugten Myonen bestimmen will. Wegen des Abfalls der Funktion A_{TT} in Vorwärts- und Rückwärtsstreurichtung betrachtet man am besten die Streuung in einen um den Polarwinkel $\Theta_{3,S} = 90^\circ$ symmetrischen Winkelbereich. Die charakteristische Größe $\Sigma_{TT}[\Theta_{3,S}, 180^\circ - \Theta_{3,S}]$, definiert in (5-15) und aufgetragen in Abb. 5-4d, durchläuft als Funktion der Integrationsgrenze ein schwaches Maximum. Die effektivste Anordnung erhält man bei Integration über den Winkelbereich $-0.6 < \cos\Theta_{3,S} < 0.6$. In diesem Fall ist $\Sigma_{TT}[\dots] \approx 10^{-5}$ mb.

Polarisationsmessungen mit Hilfe von Myon-Paarerzeugung hat man erfolgreich an den Elektronen- und Positronenstrahlen in Speicherringen durchgeführt. So wurde an dem Speicherring SPEAR bei einer Energie von $\sqrt{s} = 3.1 \dots 7.4$ GeV aus der Azimutwinkelverteilung die natürliche transversale Polarisation der Strahlteilchen bestimmt [20]. Für $\sqrt{s} = 7.4$ GeV beispielsweise ergab sich ein Polarisationsgrad von $s_1 = 0.70 \pm 0.03$.

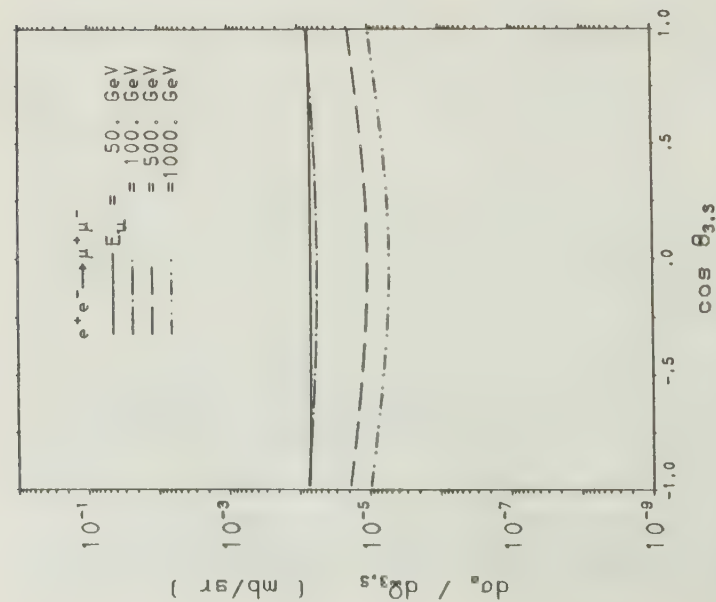


Abb. 5-4a :
Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ im Schwerpunktsystem. Parameter: Einstrahlungsenergie $E_{1,L}$ im Laborsystem.

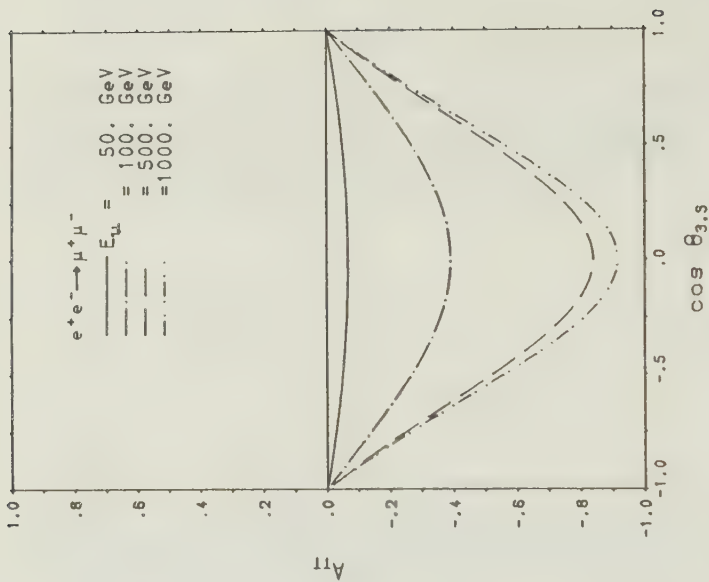


Abb. 5-4b :
Asymmetriekoeffizient A_{TT} (vgl. (5-3)) als Funktion des Streuwinkels $\theta_{3,S}$ für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

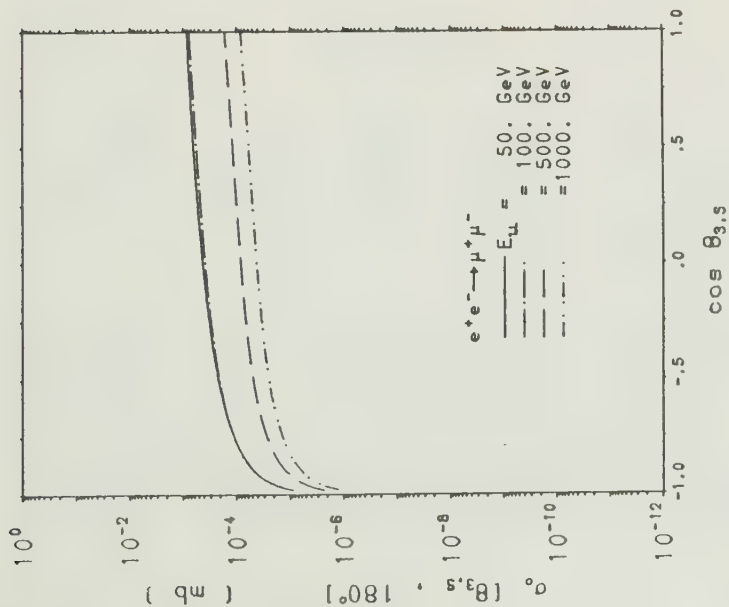


Abb. 5-4c :
Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma[\theta_{3,S}, 180^\circ]$ (Def. s. (5-5b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,S}$. Es gilt $\sigma[\dots] \equiv \Sigma_{LL}[\dots]$.

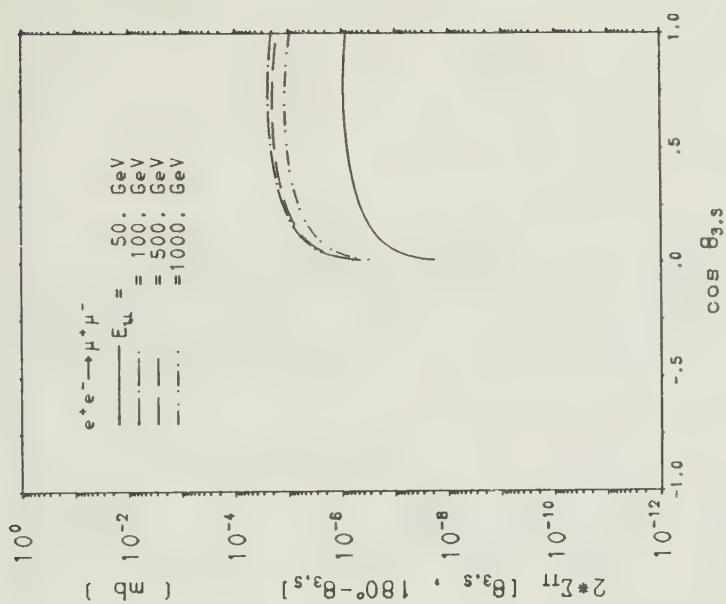


Abb. 5-4d :
 $2 \times \Sigma_{TT}[\theta_{3,S}, 180^\circ - \theta_{3,S}] \equiv \sigma[\dots] \times A_{TT}^2[\dots]$ (vgl. (5-15)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,S}$ für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.



Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Pion-Paarerzeugung durch Austausch eines virtuellen Photons ist in Hochenergienäherung für die einfallenden Teilchen durch (5-23) gegeben. Im Schwerpunktsystem erhält man für den unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt und den Asymmetriekoeffizient A_{TT} die expliziten Ausdrücke (siehe z.B. [38,39,25])

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_{3,S}} = r_e^2 \frac{m_1^2}{8s} \beta_{3,S} |F_\pi(s)|^2 \sin^2\Theta_{3,S} \quad (5-28a)$$

und

$$A_{TT} \equiv 1. \quad (5-28b)$$

Es ist $\beta_{3,S}$ der Betrag der Geschwindigkeit (in Einheiten von c) eines Pions im Schwerpunktsystem, s das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem, r_e der klassische Elektronenradius und $F_\pi(s)$ der Formfaktor des Pions. Nach Tab. 5-1 liegt die Schwellenenergie für diesen Prozess bei $E_{1,L} = 76.24 \text{ GeV}$.

In Abb. 5-5a ist der differentielle Wirkungsquerschnitt aus (5-28a) für die Einfallsennergien $E_{1,L} = 100, 500$ und 1000 GeV als Funktion des Streuwinkels im Schwerpunktsystem aufgetragen. Für den Formfaktor sind dabei die in Tab. 5-2 zusammengestellten Werte eingesetzt. Im Bereich von $E_{1,L} \approx 500 \text{ GeV}$ dominiert der Beitrag der ρ -Resonanz den Formfaktor [42] ($\sqrt{s} = 0.715 \text{ GeV} \approx m_\rho = 0.774 \text{ GeV}$). Jenseits von $\sqrt{s} = 1 \text{ GeV}$ fällt $|F_\pi(s)|^2$ sehr rasch ab [41].

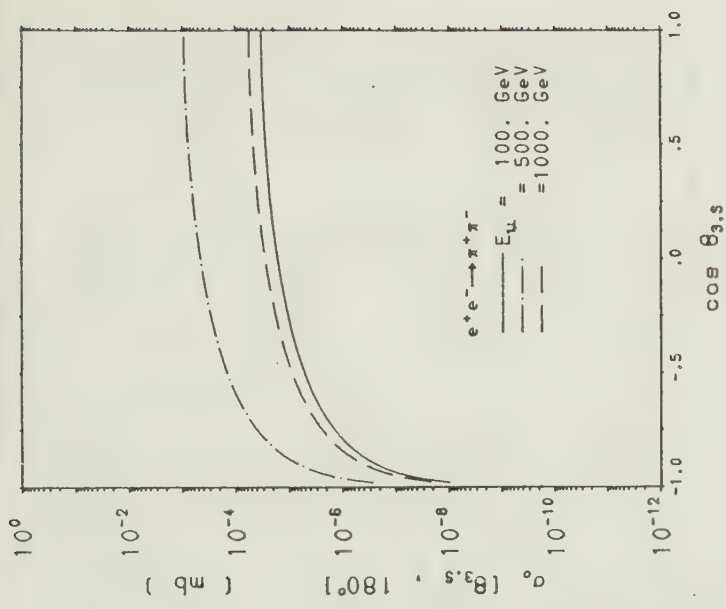


Abb. 5-5b :
Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma_0[\theta_{3,S}, 180^\circ]$ (Def. 5-5b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,S}$. Es gilt $\sigma_0[\dots] \equiv \Sigma_{LL}[\dots] \equiv 2 \times \Sigma_{TT}[\dots]$.

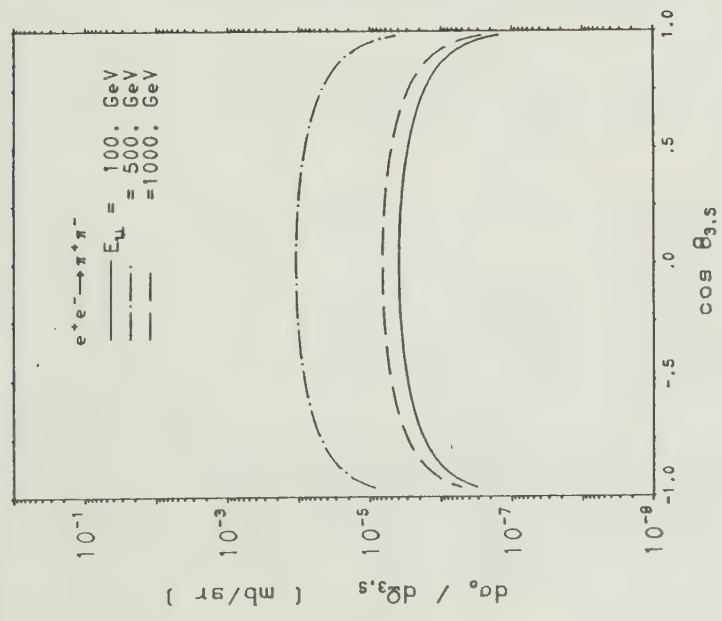


Abb. 5-5a :
Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ im Schwerpunktsystem. Parameter: Einschußenergie $E_{1,L}$ im Laborsystem.

$E_{i,L} / \text{GeV}$	$\sqrt{s} / \text{GeV}$	s / GeV^2	$ F_{\pi}(s) ^2$	Quelle
100.	0.320	0.102	1.35	[43]
500.	0.715	0.511	28.	[42] *)
1000.	1.011	1.022	3.	[42] *)

Tab. 5 - 2 : Verwendete Werte für das Betragsquadrat $|F_{\pi}(s)|^2$ des Pion-Formfaktors. Die mit *) gekennzeichneten Werte sind aus benachbarten Meßwerten interpoliert.

Da $|A_{LL}| = |A_{TT}| = 1$ ist, fallen die charakteristischen Größen $\Sigma_{LL}[\dots]$ und $2 \times \Sigma_{TT}[\dots]$ mit dem integrierten unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\dots]$ aus Abb. 5 - 5b zusammen. $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ als Integral über eine positiv definite Funktion steigt mit wachsendem Integrationsbereich an. Die beste Effektivität für eine Polarisationsmessung mittels Pion-Paarerzeugung erhält man deshalb, wenn man die Polarisationsasymmetrie des totalen Wirkungsquerschnittes ($\cos\Theta_{3,S} = 1$ in Abb. 5 - 5b) bestimmt.

$$\sigma_{o,tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \beta_{3,S}^3 \times \frac{1}{4} |F_{\pi}(s)|^2. \quad (5-29)$$

5.4.1.3. $e^+ + e^- \rightarrow 2 \gamma$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt in niedrigster störungstheoretischer Ordnung ist bis auf Terme der Ordnung $O(1/\gamma_{2,S}^2)$ gegeben durch (5-23) mit [39]

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,S}} = r_e^2 \frac{m_1^2}{s} \frac{1 + \cos^2\Theta_{3,S}}{\sin^2\Theta_{3,S} + (4m_1^2/s) \cos^2\Theta_{3,S}}, \quad (5-30a)$$

$$A_{TT} = - \frac{\sin^2\Theta_{3,S} + (4m_1^2/s) \cos^2\Theta_{3,S}}{1 + \cos^2\Theta_{3,S}}. \quad (5-30b)$$

Dabei bezeichnet wiederum r_e den klassischen Elektronenradius und s das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem. Da m_1^2/s sehr klein ist, läßt sich die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes in guter Näherung durch $d\sigma/d\Omega_{3,S} \sim 1/E_{1,L}$ beschreiben. Aus demselben Grund ist A_{TT} nahezu unabhängig von der Einschußenergie.

In den Abb. 5-6a und 5-6b sind die Funktionen aus (5-30a) und (5-30b) für die Einfallsennergien $E_{1,L} = 1, 10, 100$ und 1000 GeV aufgetragen. Abb. 5-6a zeigt den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels im Schwerpunktsystem. Er steigt in Vorwärts- und Rückwärtsstreurichtung stark an. Aus Abb. 5-6b entnimmt man, daß der Asymmetriekoeffizient A_{TT} maximal ist für 90° -Streuung. Für Vorwärts- und Rückwärtsstreuung verschwindet er.

Zur Abschätzung der Effektivität einer Messung der longitudinalen Polarisation mit Hilfe von 2γ -Paarvernichtung berechnet man den effektiven Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\dots]$ (definiert in (5-7)). Er ist wie in den beiden bereits behandelten Prozessen auf Grund von $A_{LL} = -1$ identisch mit dem integrierten unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\dots]$ (definiert in (5-5b)). Abb. 5-6c gibt den Verlauf von $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 90^\circ]$ als Funktion der Integrationsgrenze $\Theta_{3,S}$ wieder. Der analytische Ausdruck für das Integral ist

$$\sigma_o[\Theta_{3,S}, 90^\circ] = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \frac{3}{2} \left(\ln \frac{a + \cos\Theta_{3,S}}{a - \cos\Theta_{3,S}} - \cos\Theta_{3,S} + O(1/\gamma_{2,S}^2) \right),$$

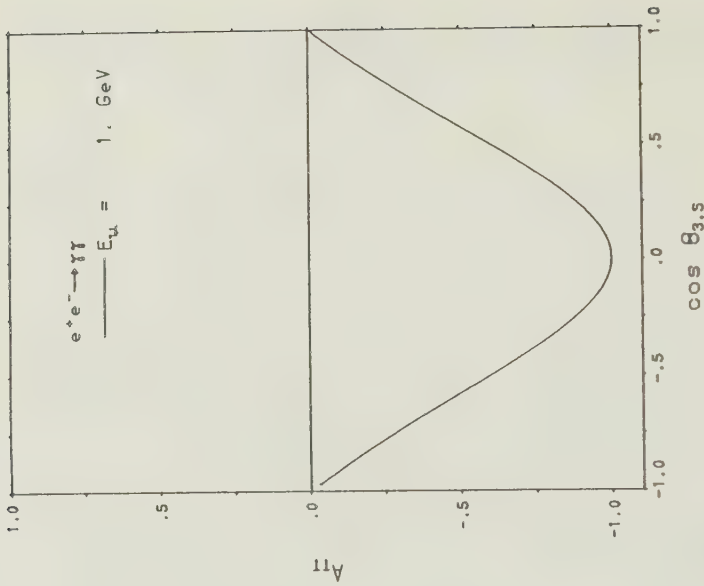


Abb. 5-6b :
Asymmetriekoeffizient A_{1T} (vgl. (5-3)) als Funktion des Streuwinkels $\theta_{3,S}$ für $e^+ + e^- \rightarrow 2 \gamma$.

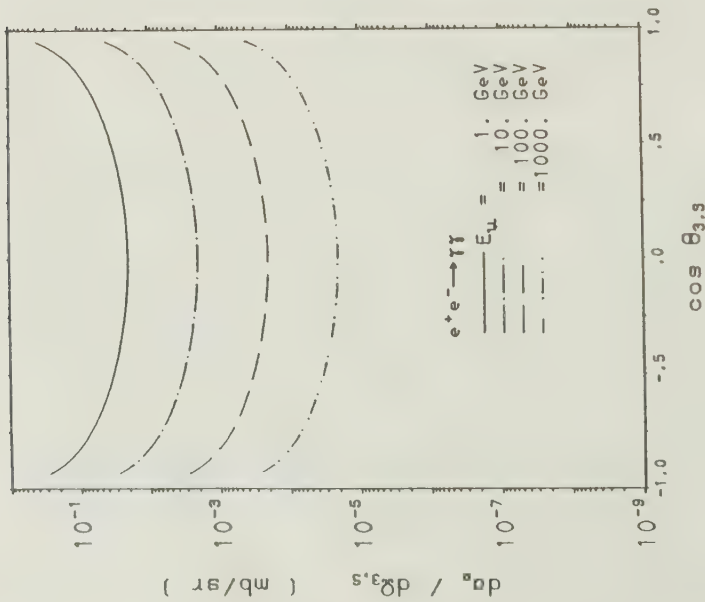


Abb. 5-6a :
Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt für $e^+ + e^- \rightarrow 2 \gamma$ im Schwerpunktsystem. Parameter: Einschüßenergie $E_{1,L}$ im Laborsystem.

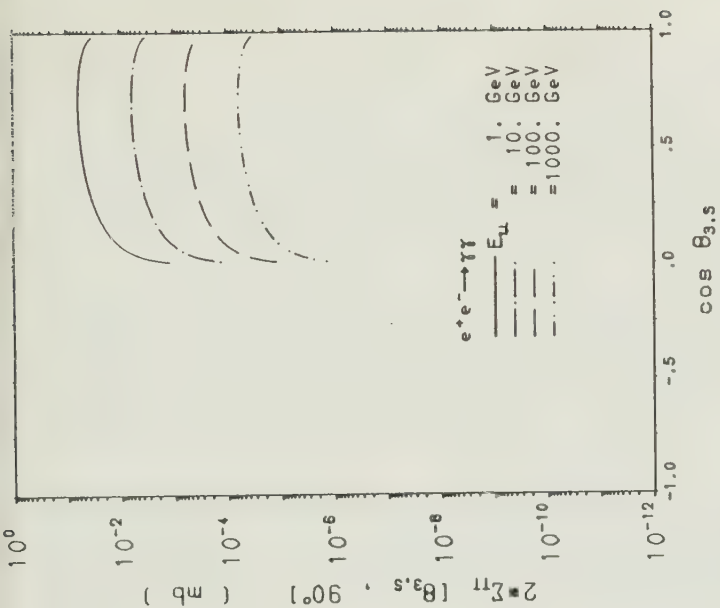


Abb. 5-6d :
 $2 \times \Sigma_{TT} [\theta_{3,s}, 90^\circ] \equiv \sigma_o [\dots] \times A_{TT}^2 [\dots]$ (vgl. (5-15)) als
 Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für $e^+ + e^- \rightarrow 2 \gamma$.

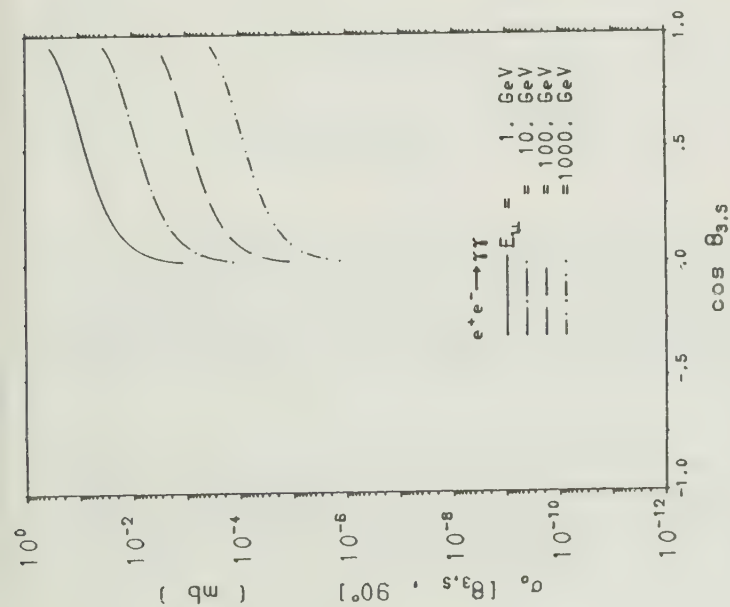


Abb. 5-6c :
 Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma_o [\theta_{3,s}, 90^\circ]$ (Def. s.
 (5-5b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$. Es gilt
 $\sigma_o [\dots] \equiv \Sigma_{LL} [\dots]$.

$$a \equiv \sqrt{\frac{\gamma_{2,S}^2}{\gamma_{2,S}^2 - 1}} \approx 1 + \frac{1}{2 \gamma_{2,S}^2} . \quad (5-31)$$

Da zwei identische Teilchen im Endzustand vorliegen, ist für das feste Ende des Integrationsintervalles der Streuwinkel $\Theta_{3,S} = 90^\circ$ gewählt. $\sigma_0[\dots]$ wächst monoton mit zunehmender Intervallgröße.

Ein Vergleich von (5-31) mit (5-27) zeigt, daß man durch 2γ -Paarvernichtung größere Wirkungsquerschnitte erhalten kann als im Fall der Myon-Paarerzeugung. Das Energiespektrum von 2γ -Paarvernichtung ist experimentell allerdings schwer zu bestimmen, da zwei annähern kollineare Photonen bei der Streuung entstehen.

Die Separation der beiden Photonen wird überflüssig, wenn man den totalen Wirkungsquerschnitt mißt. Man erhält ihn aus (5-31) unter Verwendung der Gleichungen (3-3) und (3-5).

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow 2 \gamma) &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \frac{3}{2} \{2 \ln(2\gamma_{2,S}) - 1\} \\ &\approx \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \frac{3}{2} \{2 \ln(2E_{1,L}/m_1) - 1\} . \end{aligned} \quad (5-32)$$

Der Faktor $\{2\ln\dots - 1\}$ nimmt Werte zwischen 7.3 (für $E_{1,L} = 1$ GeV) und 14.2 (für $E_{1,L} = 1$ TeV) an. Damit ist der totale Wirkungsquerschnitt für 2γ -Produktion etwa so groß wie der totale Wirkungsquerschnitt für die Pion-Paarerzeugung auf der ρ -Resonanz (vgl. (5-29) und Tab. 5-2).

Die Eignung von 2γ -Paarvernichtung zur Messung der transversalen Polarisation kann mit Hilfe von $\Sigma_{TT}[\dots]$ (definiert in (5-15)) beurteilt werden. Diese Größe ist in Abb. 5-6d als Funktion der Integrationsgrenze aufgetragen. Der Funktionsverlauf zeigt ein breites Maximum bei $\cos\Theta_{3,S} \approx 0.6$.

5.4.2. Bhabha-Streuung

Es ist bekannt, daß sich Bhabha-Streuung zur Messung der natürlichen transversalen Strahlpolarisation in Speicherringen eignet. Z.B. wurde bei SPEAR der Polarisationsgrad der Elektronen und Positronen bei einer Gesamtenergie von $\sqrt{s} = 7.4$ GeV im Schwerpunktsystem zu $s_{\perp} = 0.66 \pm 0.12$ bestimmt [20]. Im folgenden wird die Effektivität einer solchem Polarisationsmessung berechnet. Damit kann beurteilt werden, ob sich mit Bhabha-Streuung auch die Polarisation hochenergetischer Positronen im Endzustand eines Streuexperimentes messen läßt. Denn im Unterschied zur Polarisationsmessung an Strahlteilchen in Speicherringen hat man zur Messung der Endzustandspolarisation bedeutend weniger Probeteilchen zur Verfügung.

Der Wirkungsquerschnitt für Bhabha-Streuung wurde von verschiedenen Autoren berechnet. (Einige Literaturstellen sind in [35] zu finden.) Die angegebenen Polarisationsasymmetrien weisen jedoch zum Teil falsche Vorzeichen auf (siehe eine entsprechende Bemerkung in [20]). Deshalb wurde der Wirkungsquerschnitt in niedrigster Ordnung der Störungstheorie nochmals unabhängig überprüft. Als Rechenmethode diente der Helizitätsformalismus von Anders und Jachmann [16]. Für die analytische Berechnung der Helizitätsamplituden und des Wirkungsquerschnittes wurde ein auf den Formeln aus [16] aufbauendes Computer-Programm [44] benutzt.

Das exakte Resultat der eigenen Berechnung deckt sich nach Anwenden der Hochenergienäherung mit den in [20,25] angegebenen genäherten Ausdrücken. Aus der allgemeinen Form (5-2a) des Wirkungsquerschnittes bei Paritätserhaltung verschwinden einige Terme (vgl. (B-67)) und man erhält (in Hochenergienäherung)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{3,S}} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega_{3,S}} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL} + s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) A_{TT} \right\} \quad (5-33a)$$

mit

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,S}} = r_e^2 \frac{m_1}{2E_{1,L}} \frac{\cos^4(\Theta_{3,S}/2)}{\sin^4\Theta_{3,S}} (4 - \sin^2\Theta_{3,S})^2, \quad (5-33b)$$

$$A_{LL} = \frac{\sin^2\Theta_{3,S} (8 - \sin^2\Theta_{3,S})}{(4 - \sin^2\Theta_{3,S})^2}, \quad (5-33c)$$

$$A_{TT} = \frac{\sin^4\Theta_{3,S}}{(4 - \sin^2\Theta_{3,S})^2}. \quad (5-33d)$$

Es ist r_e der klassische Elektronenradius und $\Theta_{3,S}$ der Streuwinkel des Positrons im Schwerpunktsystem.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt divergiert in Vorwärtsstreuung und verschwindet für 180°-Streuung. Diese Grenzwerte sind in Abb. 5 - 7a ausgespart. Für den übrigen Winkelbereich ist der Funktionsverlauf der Abbildung zu entnehmen. Die Einfallsennergien betragen $E_{1,L} = 1, 10, 100$ und 1000 GeV. Der von $\Theta_{3,S} = 180^\circ$ bis $\Theta_{3,S}$ integrierte Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ (vgl. (5-5b)) ist in Abb. 5 - 7b als Funktion der Integrationsgrenze $\Theta_{3,S}$ aufgetragen. (Die Energieabhängigkeit des differentiellen und des integrierten Wirkungsquerschnittes ist einfach: Nach (3-33b) gilt $d\sigma/d\Omega_{3,S} \sim 1/E_{1,L}$.)

In den Abbildungen 5 - 7c und 5 - 7d sind die Asymmetriekoeffizienten A_{LL} und A_{TT} dargestellt. Sie sind energieunabhängig und zeigen ein Maximum bei 90°-Streuung. Für Vorwärts- und Rückwärtsstreuung gehen sie gegen Null. Das hat zur Folge, daß die Einbeziehung des Winkelbereiches, in dem der Wirkungsquerschnitt stark ansteigt (vgl. die Abbn. 3 - 8a und 3 - 8b), die Polarisationsasymmetrie des integrierten Wirkungsquerschnittes nicht vergrößert sondern vermindert.

Das zeigt sich in Abb. 5 - 7e. Hier ist der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ (definiert in (5-7)) als Funktion des Grenzwinkel $\Theta_{3,S}$ aufgetragen. Er durchläuft für alle betrachteten Einfallsennergien

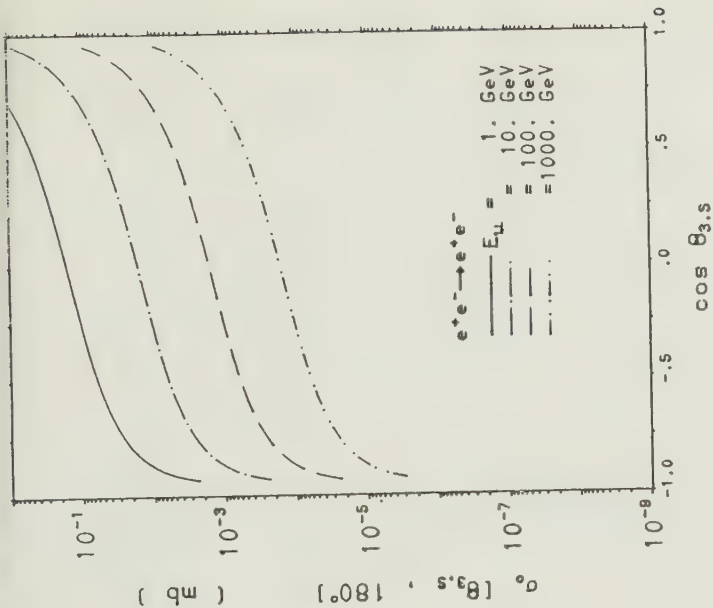


Abb. 5 - 7b :
Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{int}}[\theta_{3,s}, 180^\circ]$ (Def. s. (5-5b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

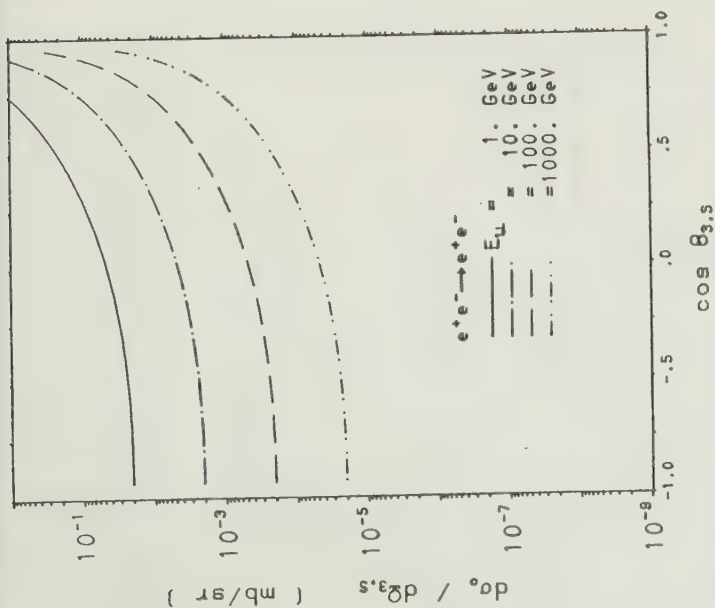


Abb. 5 - 7a :
Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt für $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ im Schwerpunktsystem. Parameter: Einstrahlungsenergie $E_{1,L}$ im Laborsystem.

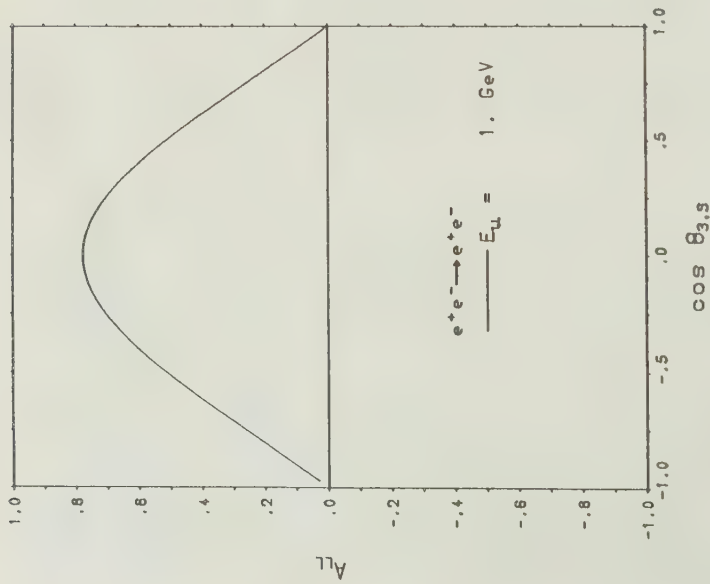


Abb. 5-7c :
Asymmetriekoeffizient A_{LL} (vgl. (5-3)) als Funktion des Streuwinkels $\theta_{3,5}$ für $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

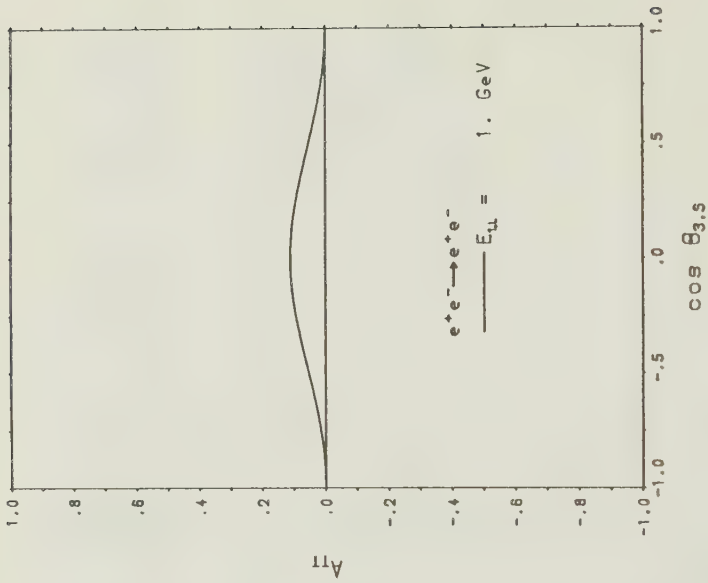


Abb. 5-7d :
Asymmetriekoeffizient A_{TT} (vgl. (5-3)) als Funktion des Streuwinkels $\theta_{3,5}$ für $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

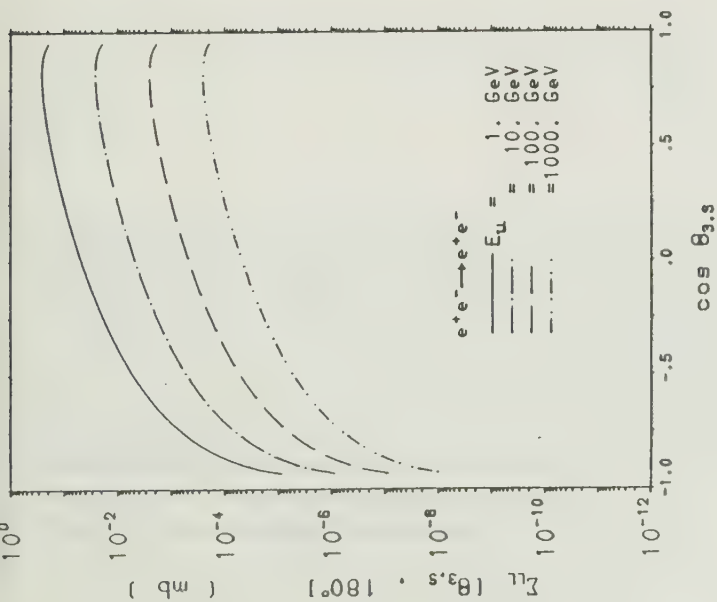


Abb. 5-7e :

$\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 180^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{LL}^2[\dots]$ (vgl. (5-7)) als Funktion der Integrationsgrenze $\Theta_{3,S}$ für $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

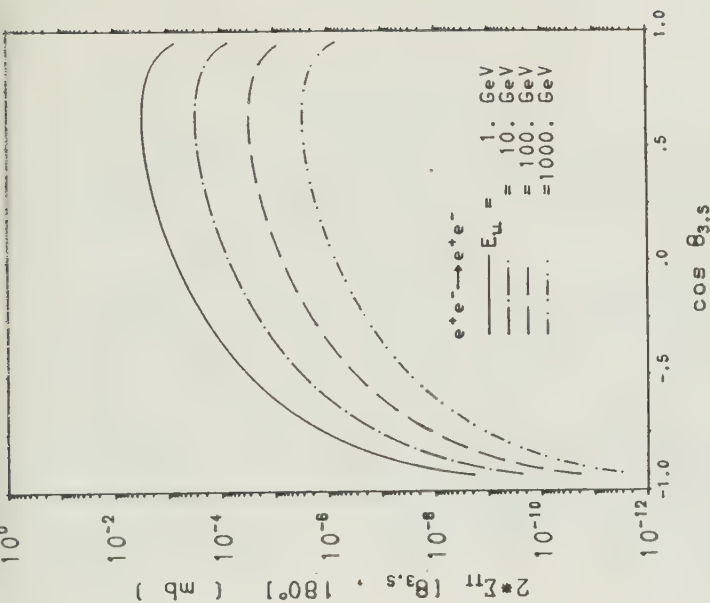


Abb. 5-7f :

$2 \times \Sigma_{TT}[\Theta_{3,S}, 180^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{TT}^2[\dots]$ (vgl. (5-15)) als Funktion der Integrationsgrenze $\Theta_{3,S}$ für $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$.

$E_{1,L}$ ein Maximum bei $\cos\Theta_{3,S} \approx 0.80$ und nimmt dort Werte an von etwa $0.3 \text{ mb} / (E_{1,L} / \text{GeV})$.

Die Funktion $\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ ist unempfindlich gegen eine Verschiebung der (festen) Integrationsgrenze $\Theta_{3,S} = 180^\circ$. Da der Wirkungsquerschnitt in Rückwärtsstreurichtung verschwindet, kann man die Grenze des Integrationsbereiches z.B. von $\cos\Theta_{3,S} = -1$ nach $\cos\Theta_{3,S} = -0.5$ verlagern, ohne daß sich Lage und Höhe der Maxima wesentlich ändern.

Der Verlauf der Funktion $\Sigma_{TT}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ (definiert in (5-15)) ist in Abb. 5 – 7f angegeben und stimmt qualitativ mit dem Verlauf von $\Sigma_{LL}[\dots]$ aus Abb. 5 – 7e überein. Wegen des im Vergleich zu A_{LL} rascheren Abfalls des transversalen Asymmetriekoeffizienten A_{TT} (siehe die Abbn. 5 – 7c und 5 – 7d) für ansteigende Werte von $|\cos\Theta_{3,S}|$ nimmt $\Sigma_{TT}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ bereits bei $\cos\Theta_{3,S} \sim 0.6$ sein Maximum an. Außerdem ist der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{TT}[\dots]$ um etwa einen Faktor 100 kleiner als $\Sigma_{LL}[\dots]$, da die Asymmetrie A_{TT} nur ungefähr $1/10$ des Wertes von A_{LL} erreicht.

5.4.3. Møller-Streuung

Auch Møller-Streuung wurde bereits experimentell zur Polarisationsmessung benutzt. Mit Hilfe eines polarisierten Targets wurde am SLAC [31] der longitudinale Polarisationsgrad des erzeugten hochenergetischen Elektronenstrahles im Energiebereich $E_{1,L} = 6.47 \dots 19.4 \text{ GeV}$ gemessen, mit dem Ergebnis $s_{||} = 0.76 \pm 0.03$.

Der Wirkungsquerschnitt für Møller-Streuung unterscheidet sich vom Wirkungsquerschnitt für Bhabha-Streuung (in niedrigster Ordnung der Störungstheorie und in Hochenergienäherung) nur durch den unpolarisierten Anteil [35]: Während unpolarisierte Bhabha-Streuung durch (5-33a) beschrieben wird, ist der Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Møller-Streuung durch den Ausdruck

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,S}} = r_c^2 \frac{m_1}{2E_{1,L}} \frac{(4 - \sin^2\Theta_{3,S})^2}{\sin^4\Theta_{3,S}} \quad (5-34)$$

gegeben. Gl. (5-33a) für die Form des polarisierten Wirkungsquerschnittes und die Beziehungen (5-32c) und (5-32d) für die Asymmetriekoeffizienten A_{LL} und A_{TT} sind für Møller- und Bhabha-Streuung gleichermaßen gültig. (Diese Ergebnisse wurden mit der Methode von Anders und Jachmann [16] zur Berechnung von Helizitätsamplituden und mit Hilfe des darauf aufbauenden Computer-Programmes zur analytischen Berechnung von Helizitätsamplituden [44] überprüft.)

Entsprechend ist die Winkelabhängigkeit der Asymmetrien A_{LL} und A_{TT} für Møller-Streuung den Abbildungen 5-7c und 5-7d zu entnehmen. Es ist jedoch zu beachten, daß der Streuwinkel im Schwerpunktsystem nur den Bereich $\Theta_{3,S} = 0^\circ$ bis $\Theta_{3,S} = 90^\circ$ durchlaufen kann, da die Teilchen identisch sind.

Der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt (3-34) ist in Abb. 5-8a für einige Werte von $E_{1,L}$ aufgetragen. Der integrierte Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 90^\circ]$ kann aus Abb. 5-8b entnommen werden. Die Energieabhängigkeit wird in beiden Fällen durch den Faktor $1/E_{1,L}$ beschrieben.

Møller- und Bhabha-Streuung haben als Analyseprozesse zur Polarisationsmessung vergleichbare Eigenschaften. Wie bei Bhabha-Streuung durchlaufen die effektiven Wirkungsquerschnitte $\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 90^\circ]$ (Abb. 6-8c) und $\Sigma_{TT}[\Theta_{3,S}, 90^\circ]$ (Abb. 6-8d) als Funktion der Integrationsgrenze Maxima. Sie liegen bei $\cos\Theta_{3,S} \approx 0.8$ bzw. bei $\cos\Theta_{3,S} \approx 0.6$. Der Maximalwert von $\Sigma_{LL}[\dots]$ liegt bei ca. $0.5 \text{ mb} / (E_{1,L} / \text{GeV})$. Für die Messung der transversalen Polarisation ist die Effektivität um einen Faktor 100 kleiner.

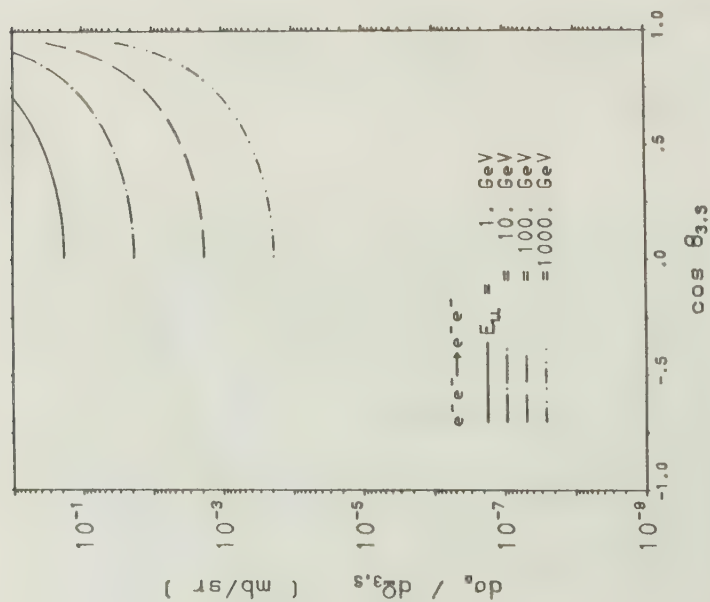


Abb. 5 - 8a :

Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt für $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ im Schwerpunktsystem. Parameter: Einstrahlenergie $E_{1,L}$ im Laborsystem.

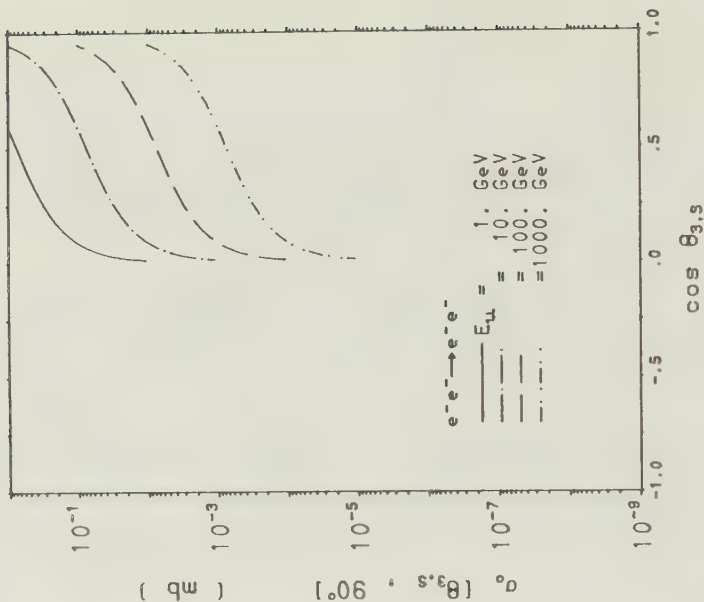


Abb. 5 - 8b :

Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma(\theta_{3,s}, 90^{\circ})$ (Def. s. (5-5b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

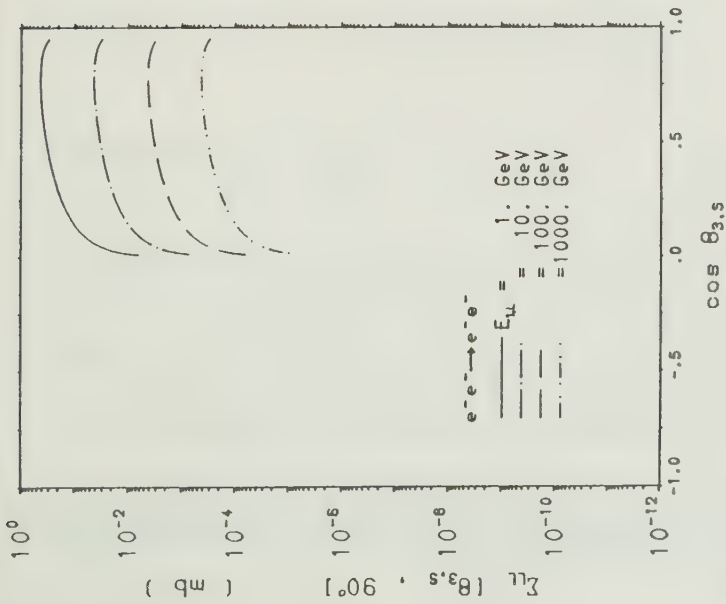


Abb. 5-8c :

$\Sigma_{LL}[\theta_{3,s}, 90^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{LL}^2[\dots]$ (vgl. (5-7)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

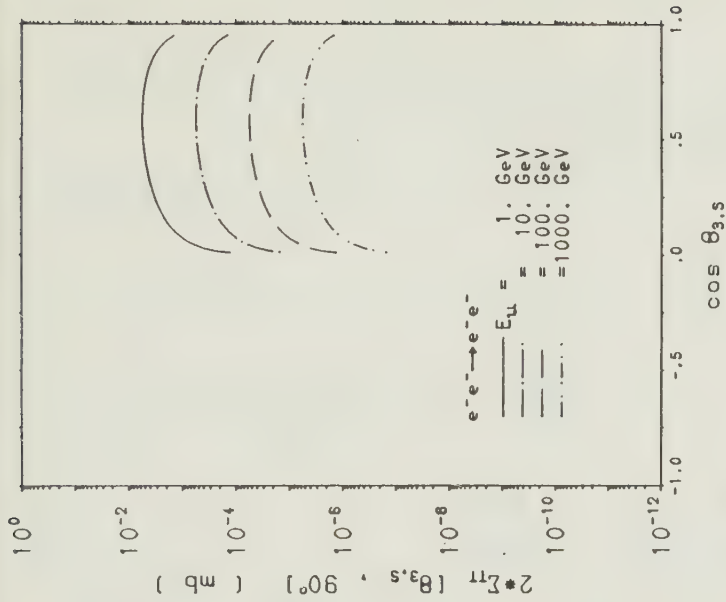


Abb. 5-8d :

$2 \times \Sigma_{TT}[\theta_{3,s}, 90^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{TT}^2[\dots]$ (vgl. (5-15)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

5.4.4. Elastische Elektron-Proton-Streuung

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an Protonen bestimmt sich in niedrigster störungstheoretischer Näherung aus dem Feynman-Diagramm in Abb. 5 - 9.

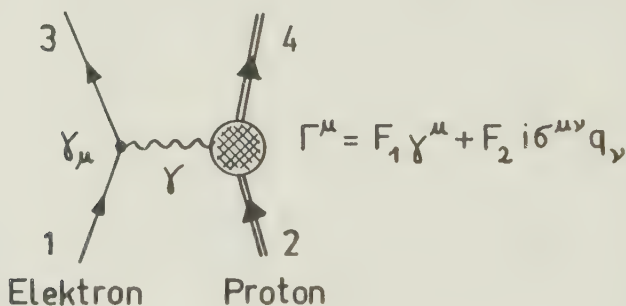


Abb. 5 - 9 : Feynman-Diagramm für elastische Elektron-Proton-Streuung in niedrigster Ordnung.

Das Betragsquadrat des Matricelementes, spezialisiert auf kollinear kollidierende Teilchen, ist von der Form (5-2a). Einige Terme verschwinden:

1) Der Term $\hat{R}(0,0; 1,1)$ ist Null, weil die Helizitätsamplituden für $\phi_3 = 0$ in niedrigster Ordnung rein imaginär sind (vgl. die Diskussion im Zusammenhang mit Gl. (B-50)).

2) Terme proportional zu $\hat{R}(J_1, M_1; J_2, M_2)$ mit $M_1 \neq 0$ liefern kleine Polarisationsasymmetrien. Vernachlässigt man die Elektronenmasse (Hochenergienäherung, vgl. (B-62)), so werden sie identisch Null.

Unter Verwendung der Asymmetriekoeffizienten aus (5-3) und mit vernachlässigter Elektronenmasse erhält man für den Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem den Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{3,S}} = \frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,S}} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL} + s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) A_{LT} \right\}. \quad (5-35a)$$

Teilchen 3 ist das gestreute Elektron. Elastische Elektron-Proton-Streuung ist unabhängig von der transversalen Polarisation hochenergetischer Elektronen.

Der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt $d\sigma_o/d\Omega_{3,S}$ wird durch die Rosenbluth-Formel (siehe z.B. [35] oder [45]) beschrieben.

$$\frac{d\sigma_o}{d\Omega_{3,S}} = \frac{a^2}{2s} \frac{G_E^2(q^2)}{\sin^4(\Theta_{3,S}/2)} \cdot I_o, \quad (5-35b)$$

mit

$$I_o = \mu_P^2 \left\{ 1 + \cos^2(\Theta_{3,S}/2) \left(w - 1 + \frac{m_2^2}{2E_{1,S}^2} + \cos^2(\Theta_{3,S}/2) \right) \right\} + \frac{1 - \mu_P^2}{1 + r} \cos^2(\Theta_{3,S}/2) \left\{ w + 1 + \frac{m_2^2}{2E_{1,S}^2} \right\}$$

und den Bezeichnungen

$$s = (E_{1,S} + E_{2,S})^2 = 2E_{1,L}m_2 + m_2^2 + m_1^2,$$

$$q^2 = -4E_{1,S}^2 \sin^2(\Theta_{3,S}/2), \text{ mit } q = p_1 - p_3,$$

$$r \equiv -q^2/(4m_2^2),$$

$$w \equiv \frac{E_{2,S}}{E_{1,S}} = \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{s + m_1^2 - m_2^2}.$$

Außerdem sind anstelle der Formfaktoren $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$ aus Abb. 5-9 die elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren $G_E(q^2)$ und $G_M(q^2)$ verwendet:

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + (q^2 / 2m_2) F_2(q^2),$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + 2m_2 F_2(q^2).$$

Der magnetische Formfaktor tritt in (5-35b) nicht explizit auf. Er ist mit Hilfe des magnetischen Momentes $\mu_P = 2.7928$ des Protons (in Bohrschen Magnetonen) durch den elektrischen Formfaktor ausgedrückt:

$$G_M(q^2) = \mu_P G_E(q^2).$$

Die Asymmetriekoeffizienten A_{LL} und A_{LT} sind in mehreren Arbeiten berechnet (siehe z.B. [45]) und durch eigene Berechnung überprüft [44].

$$A_{LL} = \frac{\sin^2(\Theta_{3,S} / 2)}{I_0} \left\{ \mu_P^2 \left(1 + w \cos^2(\Theta_{3,S} / 2) \right) - \frac{\mu_P (1 - \mu_P) (1 + w)}{1 + \tau} \cos^2(\Theta_{3,S} / 2) \right\}, \quad (5-35c)$$

$$A_{LT} = \frac{\sin \Theta_{3,S} \sin^2(\Theta_{3,S} / 2)}{I_0} \times \left\{ \mu_P^2 w \frac{m_2}{2 E_{1,S}} - \frac{\mu_P (\mu_P - 1) (1 + w)}{4 (1 + \tau)} \left[\frac{m_2}{E_{1,S}} + \frac{2 E_{1,S}}{m_2} \right] \right\}. \quad (5-35d)$$

Im Gegensatz zur Streuung von hochenergetischen Elektronen an anderen Elektronen existiert der Asymmetriekoeffizient A_{LT} bei der Streuung an Protonen. Die Ursache hierfür liegt im anomalen magnetischen Moment des Protons, welches einen Spin-Flip verursacht.

In Abb. 5 – 10a ist der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt aus Gl. (5-35b) als Funktion des Streuwinkels $\Theta_{3,S}$ im Schwerpunktsystem aufgetragen. Er divergiert in Vorwärtsstreurichtung. Weiter ist

zu erkennen, daß bei festgehaltenem Streuwinkel der Wirkungsquerschnitt sehr rasch abfällt, wenn man die Einfallsenergie $E_{1,L}$ erhöht. Dafür verantwortlich ist der starke Abfall des Formfaktors mit zunehmendem Impulsübertrag $Q^2 = -q^2$, wie er sich aus dem Funktionsverlauf

$$G_E(q^2) = \frac{1}{[1 - (q^2 / 0.71 \text{ GeV}^2)]^2} \quad (5-36)$$

ergibt (siehe z.B. [45]).

In Abb. 5 – 10b ist der differentielle Wirkungsquerschnitt über das Intervall $[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ integriert und als Funktion von $\Theta_{3,S}$ aufgetragen. Für $\Theta_{3,S} \rightarrow 0$, d.h. im Grenzübergang zum totalen Wirkungsquerschnitt, divergiert $\sigma_o[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$.

Der Asymmetriekoeffizient A_{LL} ist in Abb. 5 – 10c wiedergegeben. Er nimmt in Rückwärtsstreurichtung den Wert 1 an, verschwindet für Vorwärtsstreuung und zeigt nur eine schwache Energieabhängigkeit. Demgegenüber wechselt die Funktion A_{LT} (siehe Abb. 5 – 10d) in dem betrachteten Energiebereich zunächst das Vorzeichen (zwischen $E_{1,L} = 1$ und 10 GeV) und geht bei weiter ansteigender Einschußenergie für alle Streuwinkel gegen Null. A_{LT} verschwindet energieunabhängig in Vorwärts- und Rückwärtsstreurichtung. Der Funktionsverlauf von A_{LL} und A_{LT} zeigt, daß der Anstieg des Wirkungsquerschnittes in Vorwärtsstreurichtung nicht zur Polarisationsmessung ausgenützt werden kann, da hier die Polarisationsasymmetrien verschwinden.

Den Verlauf des effektiven Wirkungsquerschnittes $\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ (definiert in (5-7)) als Funktion der Integrationsgrenze $\Theta_{3,S}$ zeigt Abb. 5 – 10e. Dabei ist für die festgehaltene Grenze der Streuwinkel $\Theta_{3,S} = 180^\circ$ verwendet. Wählt man einen kleineren Grenzwinkel, so ändert sich der Funktionsverlauf nicht wesentlich, da der Wirkungsquerschnitt für Rückwärtsstreuung stark abfällt.

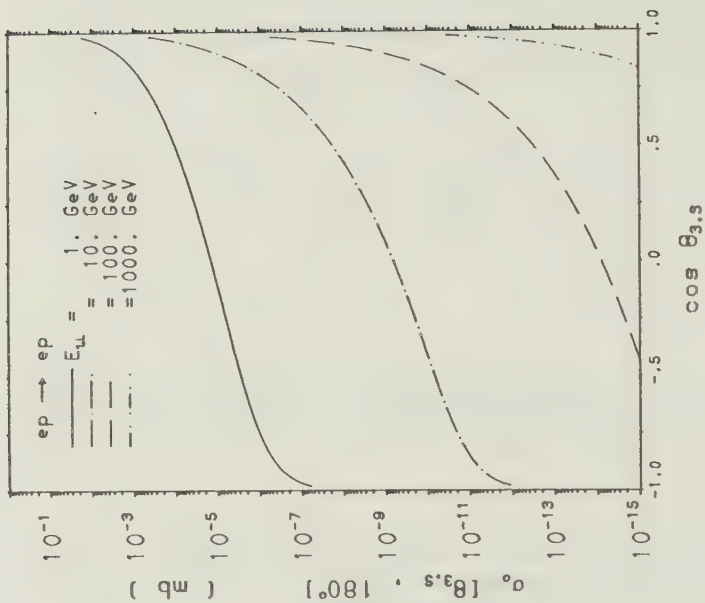


Abb. 5 - 10b :
Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma_0[\theta_{3,s}, 180^\circ]$ (Def. s. (5-5b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$.

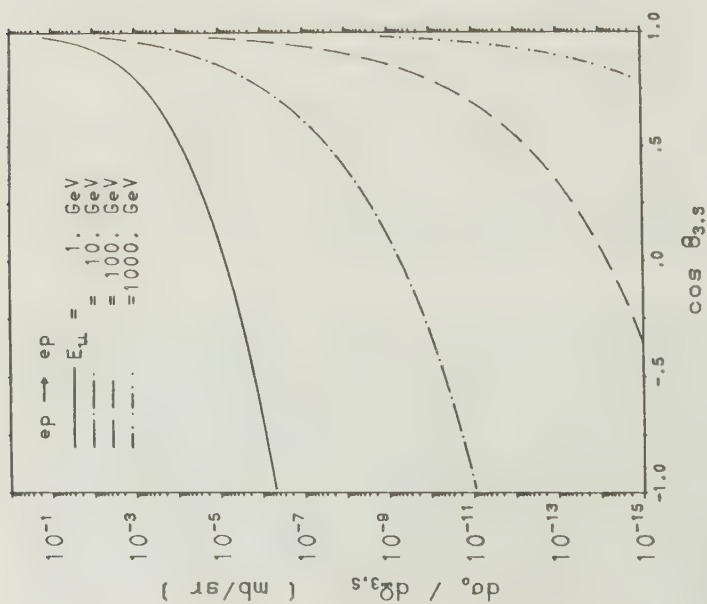


Abb. 5 - 10a :
Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem für elastische e-p-Streuung. Parameter: Einschussenergie $E_{1,L}$ des Elektrons im Laborsystem.

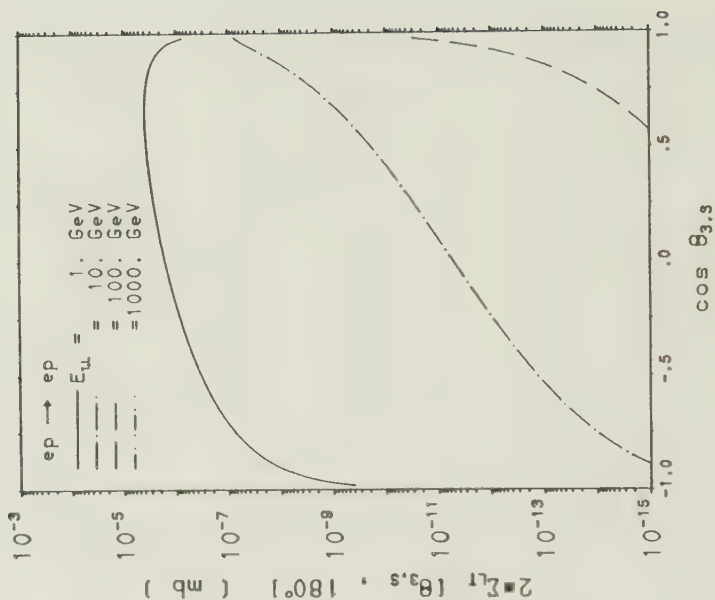


Abb. 5 - 10f :
 $2 \times \Sigma_{LT}[\theta_{3,s}, 180^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{LT}^2[\dots]$ (vgl. (5-18)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für elastische Elektron-Proton-Streuung.

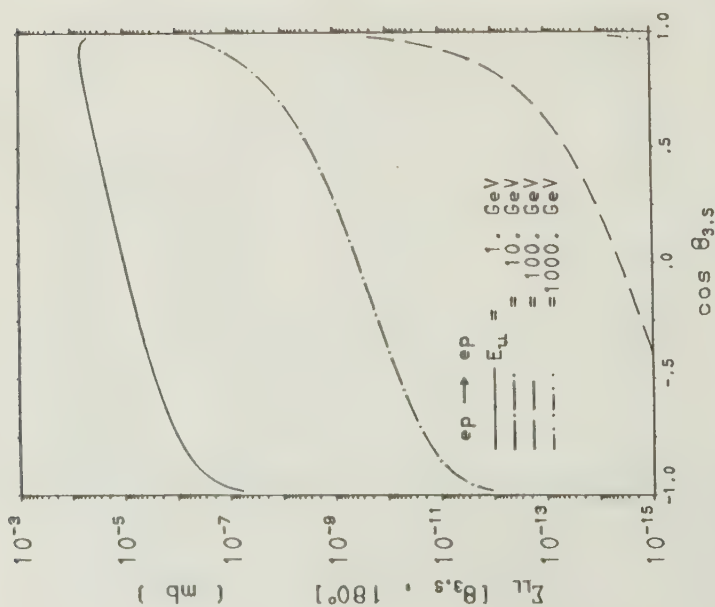


Abb. 5 - 10e :
 $\Sigma_{LL}[\theta_{3,s}, 180^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{LL}^2[\dots]$ (vgl. (5-7)) als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,s}$ für elastische Elektron-Proton-Streuung.

$\Sigma_{LL}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ durchläuft ein Maximum im Bereich kleiner Streuwinkel und wird Null sowohl für $\cos\Theta_{3,S} \rightarrow -1$ als auch für $\cos\Theta_{3,S} \rightarrow +1$. Das Verschwinden für $\cos\Theta_{3,S} \rightarrow +1$ ist aus den Funktionsverläufen in Abb. 5 - 10e nicht zu entnehmen (eine Andeutung dieses asymptotischen Verhaltens findet man allenfalls für $E_{1,L} = 1$ GeV). Von der Gültigkeit der Asymptotik für beliebige Energien kann man sich anhand der Definitionsgleichung (5-7) und des Verhaltens der Funktionen I_0 und A_{LL} für $\cos\Theta_{3,S} \rightarrow 0$ überzeugen.

Die Höhe des Maximums von $\Sigma_{LL}[\dots]$ für $E_{1,L} \geq 10$ GeV wurde nicht weiter untersucht, da die Kenntnis von geringem praktischen Nutzen ist: Eine experimentelle Anordnung, die dieses Maximum im effektiven Wirkungsquerschnitt ausnutzen soll, muß in der Lage sein, sehr schwach gestreute von ungestreuten Elektronen zu unterscheiden. Ein schwach gestreutes Elektron in dem Zusammenhang büßt deutlich weniger als 1% seiner Energie bei der Analysestreuung ein (vgl. (3-7) zur Umrechnung des Streuwinkels im Schwerpunktsystem in die Energie im Laborsystem). Diesen Energieverlust zu messen ist unrealistisch. Eine realistischere Voraussetzung - etwa die Forderung, daß ein Elektron mindestens 5% seiner Energie im Laborsystem verlieren soll - hat zur Folge, daß man nur bis $\cos\Theta_{3,S} \approx 0.9$ integrieren darf. Abb. 5 - 10e zeigt, dass $\Sigma_{LL}[\dots]$ an dieser Stelle für $E_{1,L} = 1$ GeV einen Wert von ungefähr 10^{-4} mb annimmt, der mit ansteigender Energie sehr rasch kleiner wird.

In Abb. 5 - 10f ist die Funktion $\Sigma_{LT}[\Theta_{3,S}, 180^\circ]$ dargestellt (Definition siehe (5-18)). Die Diskussion von $\Sigma_{LL}[\dots]$ läßt sich Punkt für Punkt auf $\Sigma_{LT}[\dots]$ übertragen. Verglichen mit $\Sigma_{LL}[\dots]$ ist $\Sigma_{LT}[\dots]$ noch kleiner und verschwindet noch rascher mit zunehmender Energie. Darüberhinaus erfordert eine Polarisationsmessung mittels A_{LT} die Messung der Azimutwinkelverteilung der gestreuten Elektronen.

5.4.5. Inelastische Elektron-Proton-Streuung

Der starke Abfall des elastischen Formfaktors mit wachsendem Impulsübertrag $-q^2$ und die damit verbundenen kleinen Zählraten bei großen Streuwinkeln sind verantwortlich für die geringe Effektivität von elastischer e-p-Streuung im Hinblick auf eine Polarisationsmessung an hochenergetischen Elektronen. Da der inelastische Formfaktor bekanntermaßen wesentlich langsamer abfällt, ist es naheliegend, den inelastischen Prozess $e p \rightarrow e' X$ (Abb. 5 - 11) als Analyseprozess zu betrachten. Im folgenden wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für diesen Streuprozess über einen noch näher festzulegenden Teil des Phasenraumes integriert und der zugehörige effektive Wirkungsquerschnitt Σ_{LL} berechnet.

Kinematik

Der inelastische Streuprozess läßt sich - abgesehen von der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ - durch zwei unabhängige Variable beschreiben. Häufig verwendet werden das Quadrat $Q^2 = -q^2$ des Impulsübertrages $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ und die Bjorkensche Skalenvariable x ,

$$x \equiv Q^2 / (2 m_2 v), \quad \text{mit } v \equiv p_2 q / m_2. \quad (5-37)$$

Der Impuls p_4 ist als Impuls des Schwerpunktes der entstehenden Teilchen zu verstehen. Er definiert die invariante Masse $m_4 : m_4^2 = p_4^2$. Baryonenzahlerhaltung erfordert $m_4 > m_2$. Andere Möglichkeiten, die Kinematik des inelastischen Prozesses festzulegen, bestehen darin, beispielsweise das Parameterpaar v und Q^2 zu verwenden oder die Energie $E_{3,L}$ und den Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ des gestreuten Elektrons im Laborsystem zu benutzen.

Im folgenden wird die inelastische Elektron-Proton-Streuung im Laborsystem (= Ruhesystem des Protons) betrachtet. Dazu benötigt man den Zusammenhang zwischen Q^2 , v , etc. einerseits und den Energien $E_{1,L}$,

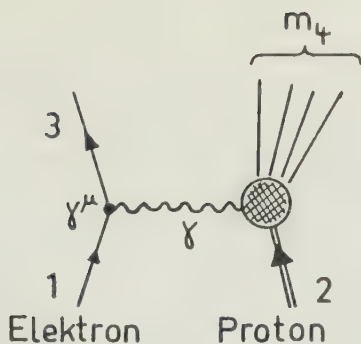


Abb. 5 - 11: Feynman-Diagramm für inelastische Elektron-Proton-Streuung durch Austausch eines Photons.

$E_{3,L}$, sowie dem Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ im Laborsystem andererseits. Wegen $p_2 = (m_2, 0)$ ist ν der Energieverlust des Leptons im Laborsystem.

$$\nu = E_{1,L} - E_{3,L} . \quad (5-38a)$$

Weiter gilt unter Vernachlässigung der Elektronenmasse

$$Q^2 = 4 E_{1,L} E_{3,L} \sin^2(\Theta_{3,L} / 2) . \quad (5-38b)$$

Aus $m_4 > m_2$ folgt $2m_2\nu > Q^2$ und damit

$$0 \leq x \leq 1 . \quad (5-38c)$$

Der Grenzfall $x = 1$ entspricht elastischer Streuung.

Verwendet man ν und $Q^2 / (2m_2)$ als unabhängige kinematische Variable und trägt diese Größen auf den Achsen eines Koordinatensystems auf, so hat der kinematisch zulässige Bereich in Hochenergienäherung die Form eines Dreiecks (durch Schraffur eingerahmter Bereich in Abb. 5 - 12). (Vernachlässigt man die Elektronenmasse nicht, so gibt es zu jedem Wert ν einen minimalen Impulsübertrag $Q_{\min}^2 \approx \nu^2 m_1^2 / (E_{1,L} E_{3,L})$.)

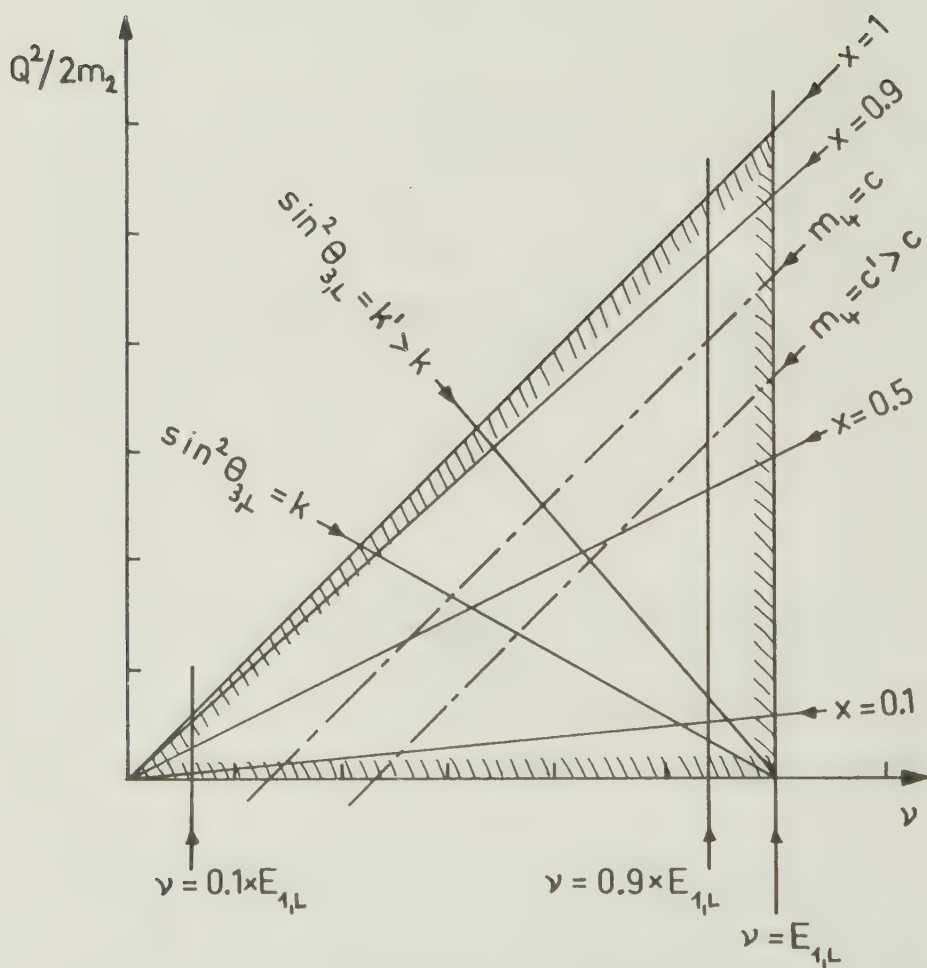


Abb. 5 - 12: Kinematisch zulässiger Bereich (= durch Schraffur eingerahmtes Dreieck) der Variablen $Q^2/(2m_2)$ und $\nu = p_2 q / m_2$ für inelastische Elektron-Proton-Streuung. Die Energie des einfallenden Elektrons ist $E_{1,L}$; das Proton ruht vor dem Stoß ($E_{2,L} = m_2$). Die Geraden verbinden Punktepaare $(\nu, Q^2/(2m_2))$ mit denselben Werten der Parameter x bzw. m_4 bzw. $\theta_{3,L}$.

In das ν - Q^2 -Diagramm kann man Kurven eintragen, längs denen andere (von ν und Q^2 abhängige) kinematische Parameter konstant sind. Einige dieser Kurven, die man als neues Koordinatensystem zur Beschreibung der Kinematik des inelastischen Streuprozesses auffassen kann, sind in Abb. 5-12 eingetragen: So liegen die Punkte mit $x = \text{const.}$ auf einer Geraden durch den Nullpunkt; eine Gerade parallel zur Winkelhalbierenden ($x = 1$) verbindet Punkte mit derselben invarianten Masse m_4 ; Punktpaare (ν, Q^2) zu demselben Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ liegen auf einer Geraden durch den Punkt $(\nu = E_{1,L}, Q^2 = 0)$. Mit Hilfe dieser Geraden wird später der Phasenraum der zu registrierenden Streuteilchen festgelegt.

Wirkungsquerschnitt

Das Betragsquadrat des Matricelementes zu Abb. 5-12 wird üblicherweise (siehe z.B. [46,47]) in der Form

$$|ME|^2 \sim (j^\mu J_\mu) (j^\nu J_\nu)^* = L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (5-39)$$

geschrieben, mit dem Leptontensor $L^{\mu\nu} = j^\mu j^{\nu*}$, $j^\mu = \bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)$, und dem hadronischen Tensor $W^{\mu\nu}$, gebildet aus dem hadronischen Strom.

Jeder dieser Tensoren läßt sich in einen symmetrischen (Index "S") und einen antisymmetrischen (Index "A") Anteil aufspalten.

$$L^{\mu\nu} = L_{(S)}^{\mu\nu} + i L_{(A)}^{\mu\nu}, \quad (5-40)$$

$$L_{(S)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2m_1^2} \left[p_3^\mu p_1^\nu + p_3^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 p_3 - m_1^2) \right],$$

$$L_{(A)}^{\mu\nu} = - \frac{1}{2m_1} \left[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (p_{3,\alpha} s_{1,\beta} - p_{1,\alpha} s_{3,\beta}) \right].$$

s_1 bezeichnet den Spinvektor des einlaufenden Leptons. Der Tensor $W^{\mu\nu}$ wird unter der Voraussetzung von Paritätserhaltung durch die Strukturfunktionen F_1 , F_2 , G_1 und G_2 parametrisiert.

$$W^{\mu\nu} = W_{(S)}^{\mu\nu} + i W_{(A)}^{\mu\nu}, \quad (5-41)$$

$$W_{(S)}^{\mu\nu} = \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \frac{F_1}{m_2} + \left(p_2^\mu - \frac{p_2 q}{q^2} q^\mu \right) \left(p_2^\nu - \frac{p_2 q}{q^2} q^\nu \right) \frac{F_2}{v m_2^2},$$

$$W_{(A)}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \frac{q_\lambda}{m_2} \left[s_{2,\sigma} m_2^2 G_1 + \left((p_2 q) s_{2,\sigma} - (s_2 q) p_{2,\sigma} \right) G_2 \right]$$

mit dem Spinvektor s_2 des Protons. Man sieht, daß jeweils nur der antisymmetrische Anteil der Tensoren von der Polarisation abhängt.

Da die Kontraktion eines symmetrischen Tensors mit einem antisymmetrischen Tensor verschwindet, kann man nur dann eine Polarisationsabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes erwarten, wenn beide Teilchen im Anfangszustand polarisiert sind. Damit werden in dem Wirkungsquerschnitt (5-3) die Asymmetriekoeffizienten A_{T0} und A_{0T} zu Null. Vernachlässigt man außerdem die Elektronenmasse, so verschwinden – wie im Fall der elastischen Streuung – die Terme proportional zu A_{TL} , A_{TT} und A'_{TT} (Hochenergienäherung, vgl. (B-62)). Im Rahmen dieser Näherung wird der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_{3,L} dE_{3,L}} = \frac{d^2\sigma_0}{d\Omega_{3,L} dE_{3,L}} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL} + s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \cos(\phi_3 + \psi^{(2)}) A_{LT} \right\}. \quad (5-42a)$$

Der Richtungswinkel $\psi^{(2)}$ der transversalen Polarisation des Protons sowie die Polarisationsgrade $s_{\perp}^{(2)}$ und $s_{\parallel}^{(2)}$ sind im lokalen Koordinatensystem des Targetteilchens (vgl. Abb. 2 – 2) definiert.

Kontrahiert man die Tensoren (5-40) und (5-41) gemäß (5-39), so ergeben sich für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt und für die Asymmetriegrößen A_{LL} und A_{LT} die Ausdrücke (vgl. [47,46])

$$\frac{d^2\sigma_o}{d\Omega_{3,L}dE_{3,L}} = \frac{E_{3,L} E_{1,L}}{\pi} \frac{d^2\sigma_o}{dQ^2 dv} = \frac{a^2 I_o}{4 E_{1,L}^2 \sin^4(\Theta_{3,L}/2)} \quad (5-42b)$$

$$\text{mit} \quad I_o = \frac{2}{m_2} F_1 \sin^2(\Theta_{3,L}/2) + \frac{1}{v} F_2 \cos^2(\Theta_{3,L}/2),$$

$$A_{LL} = \frac{\sin^2(\Theta_{3,L}/2)}{I_o} \left\{ - 2 m_2 (E_{1,L} + E_{3,L} \cos \Theta_{3,L}) G_1 + 8 E_{1,L} E_{3,L} \sin^2(\Theta_{3,L}/2) G_2 \right\}, \quad (5-42c)$$

$$A_{LT} = \frac{- 2 \sin \Theta_{3,L} \sin^2(\Theta_{3,L}/2)}{I_o} E_{3,L} \left\{ m_2 G_1 + 2 E_{1,L} G_2 \right\}. \quad (5-42d)$$

In der Literatur findet man vielfach eine Darstellung von (5-42a), in welcher die Wirkungsquerschnitte σ_T und σ_L für die Streuung virtueller transversaler und longitudinaler Photonen an Protonen verwendet werden (z.B. [46,48,49]). Auf diese Weise erhält man für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt (5-42b) die Gestalt

$$\frac{d^2\sigma_o}{d\Omega_{3,L}dE_{3,L}} = \Gamma \left[\sigma_T(Q^2, v) + \varepsilon \sigma_L(Q^2, v) \right] \quad (5-43a)$$

$$\text{mit} \quad \sigma_T = \frac{4\pi^2\alpha}{Q^2} \frac{2 \times F_1(x, Q^2)}{1-x},$$

$$\sigma_L + \sigma_T = \frac{4\pi^2\alpha}{Q^2} \frac{F_2(x, Q^2)}{1-x} [1 + Q^2/v^2]$$

sowie

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{E_{3,L}}{E_{1,L}} \frac{\nu - Q^2/(2m_2)}{Q^2(1-\epsilon)}, \quad (5-43b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1} &= 1 + \frac{2(\nu^2 + Q^2)}{4E_{1,L}E_{3,L} - Q^2} \\ &= 1 + 2(1 + \nu^2/Q^2) \tan^2(\theta_{3,L}/2). \end{aligned} \quad (5-43c)$$

Die Form (5-43a) des Wirkungsquerschnittes ist nützlich für die Diskussion des Grenzfalles der Streuung reeller Photonen: Für $Q^2 \rightarrow 0$ verschwindet der Beitrag $\sigma_L(Q^2, \nu)$ longitudinal polarisierter Photonen; der transversale Wirkungsquerschnitt $\sigma_T(Q^2, \nu)$ geht über in den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung reeller Photonen der Energie ν an Protonen [48].

Die Strukturfunktionen F_1 und F_2

Die Strukturfunktionen F_1 und F_2 des Protons lassen sich im Bereich $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ in erster Näherung durch das einfache Parton-Modell beschreiben. Im Rahmen dieses Modelles hängen sie nur von der Bjorkenschen Skalenvariable x ab (Skalenverhalten). Zwischen F_1 und F_2 besteht die Callan-Gross-Beziehung (siehe z.B. [46])

$$2x F_1(x) = F_2(x). \quad (5-44)$$

Die genauere Analyse der Meßdaten aus Elektron-Proton-Streuung am SLAC [50] und aus Elektron-Myon-Streuung am FNAL [49] und beim CERN [51,52,53] zeigt, daß die Strukturfunktionen eine leichte Q^2 -Abhängigkeit aufweisen und daß Abweichungen von der Beziehung (5-44) auftreten.

In der Datenanalyse verwendet man üblicherweise neben der Funktion $F_2(x, Q^2)$ die Größe $R(x, Q^2)$ anstelle der Strukturfunktion $F_1(x, Q^2)$. Sie

parametrisiert die Abweichung von der Callan-Gross-Relation (5-44):

$$\frac{2 \times F_1(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2)} = \frac{1 + 4m_2^2 x^2 / Q^2}{1 + R(x, Q^2)} \quad (5-45)$$

Die Funktion $R(x, Q^2)$ ist schwer zu messen. Gewöhnlich wird sie durch eine Konstante ersetzt [50,51,52]. In der Literatur [50,51,52] findet man unterschiedliche Festlegungen von R .

Die experimentell ermittelte Q^2 -Abhängigkeit von $F_2(x, Q^2)$ kann mit Hilfe der Altarelli-Parisi-Gleichungen [54] im Rahmen der QCD berechnet werden. Als Vorgabe dient der Verlauf der Funktion $F_2(x, Q^2 = Q_0^2)$ an der Stelle Q_0^2 . In der Wahl dieser Funktion (und in der Behandlung der Altarelli-Parisi-Gleichungen) gibt es Unterschiede in den Veröffentlichungen der verschiedenen Arbeitsgruppen [50,49,52].

Für die beabsichtigte Integration des Wirkungsquerschnittes kann die Q^2 -Abhängigkeit der Strukturfunktion unberücksichtigt bleiben: Nach (5-42b) ist der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt proportional zu $1/Q^4$; der Hauptbeitrag zum integrierten Wirkungsquerschnitt kommt daher von kleinen Werten für Q^2 ; die logarithmische Abhängigkeit des Formfaktors von Q^2 ist in diesem Bereich ohne spürbare Auswirkungen. Für den Verlauf der Funktion $F_2(x)$ wird die oben erwähnte Vorgabefunktion $F_2(x, Q_0^2)$ aus der Datenanalyse mit Hilfe der Altarelli-Parisi-Gleichungen verwendet. Parametrisierung nach [52] ergibt

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F_2(x, Q^2 = 5 \text{ GeV}^2) \\ &= A x^\alpha (1-x)^\beta + B (1-x)^\gamma + C \sqrt{x} (1-x)^\delta (1-ex) \end{aligned} \quad (5-46)$$

mit $A = 1.54$, $\alpha = 0.66$, $\beta = 3.23$, $\gamma = 13.4$, $B = 0.24$, $C = 0.077$, $\delta = 2.81$ und $e = -5.4$. Dabei ist $R(x, Q^2) \equiv 0$ gesetzt. Es ist anzumerken, daß $F_2(x)$ aus (5-46) vor allem zur Parametrisierung von Daten im Bereich $0.08 < x < 0.65$ dient. Für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow 1$ wird die Übereinstimmung mit den Meßwerten schlechter. Des weiteren liegen dem Funktions-

verlauf (5-46) keine Daten im Bereich der Nukleonenresonanzen von $1 \text{ GeV} < m_4 < 2 \text{ GeV}$ zu Grunde. Jedoch zeigt ein Vergleich mit den Meßwerte im Resonanzbereich [50], daß ein Funktionsverlauf von der Form (5-46) die Effekte der Resonanzstruktur von F_2 mittelt.

Die Polarisationsasymmetrie A_{LL}

Einen Ausdruck für die Polarisationsasymmetrie A_{LL} in (5-42a) kann man entweder erhalten, indem man die Strukturfunktionen $G_1(x, Q^2)$ und $G_2(x, Q^2)$ in die Gln. (5-42c) und (5-42d) einsetzt, oder indem man direkt auf die Funktion A_{LL} zurückgreift. Hier wird der zweite Weg beschritten.

Erste Messungen der Asymmetriegröße A_{LL} wurden am SLAC durchgeführt. Dabei streute man longitudinal polarisierte Elektronen an polarisierten Protonen [12,13,55,56,57]. In jüngster Zeit ist es am CERN gelungen, A_{LL} auch durch Streuung longitudinal polarisierter Myonen an polarisierten Protonen zu messen. Dieses Experiment wird die Polarisationsasymmetrie A_{LL} vor allem im Bereich kleiner Werte der Skalenvariablen x genauer festlegen [58].

Als Resultat der Streuung von Elektronen an Protonen läßt sich der Asymmetriekoeffizient A_{LL} wie folgt parametrisieren ([13], gültig für $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$):

$$A_{LL} = D \sqrt{x} (0.94 \pm 0.08). \quad (5-47a)$$

D ist ein kinematischer Faktor [55]:

$$D = \frac{E_{1,L} - \epsilon E_{3,L}}{E_{1,L} (1 + \epsilon R)}; \quad (5-47b)$$

ϵ ist in Gl. (5-43c) angegeben. Für R ist hier der Zahlenwert $R(x, Q^2) \equiv R \equiv 0.25$ zu verwenden.

Integration des Wirkungsquerschnittes

Es wird nur der Fall longitudinal polarisierter Target-Protonen ($s_{\perp}^{(2)} = 0$) betrachtet, sodaß die Polarisationsasymmetrie proportional zu A_{LT} verschwindet.

In den Abbildungen 5 - 13 bis 5 - 17 sind die Resultate der numerischen Integration aufgetragen. Jede der Abbildungen ist aufgeteilt in eine Abbildung "a", entsprechend einem Phasenraum "a", und eine Abbildung "b" für den Phasenraum "b". Die Phasenräume legen den Integrationsbereich fest. Sie sind wie folgt gewählt: In beiden Fällen ist die Q^2 -Integration auf den Bereich $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ eingeschränkt; in beiden Fällen erstreckt sich die ν -Integration über den Bereich $0.1 \times E_{1,L} < \nu < 0.9 \times E_{1,L}$ (das ist eine realistische Forderung an die Energie der zu registrierenden gestreuten Elektronen). Weitere Bedingungen werden an den Phasenraum "b" nicht gestellt. Der Phasenraum "a" wird zusätzlich durch die Forderungen $0.1 < x < 0.9$ und $m_4 > 2 \text{ GeV}$ eingeschränkt.

In "a" ist die Integration auf einen Bereich eingegrenzt, in dem der Formfaktor gut bekannt ist und durch (5-46) zufriedenstellend beschrieben wird. An den Grenzen von "b" dagegeben ist der Verlauf des Formfaktors experimentell nicht genügend abgesichert. Dafür ist dieser Phasenraum experimentell leichter festzulegen. Man sieht aus den Abbildungen, daß sich die Unterschiede zwischen den Phasenräumen "a" und "b" nicht stark bemerkbar machen. Der Grund: "a" und "b" unterscheiden sich vor allem für $x \approx 1$. Dort sind die Formfaktoren klein.

Die Integration des Wirkungsquerschnittes (5-42) wird in 2 Schritten ausgeführt. Die erste Integration über $E_{3,L}$ liefert für $s_{\perp}^{(2)} = 0$ den (einfach-) differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{3,L}} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega_{3,L}} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \bar{A}_{LL} \right\}. \quad (5-48)$$

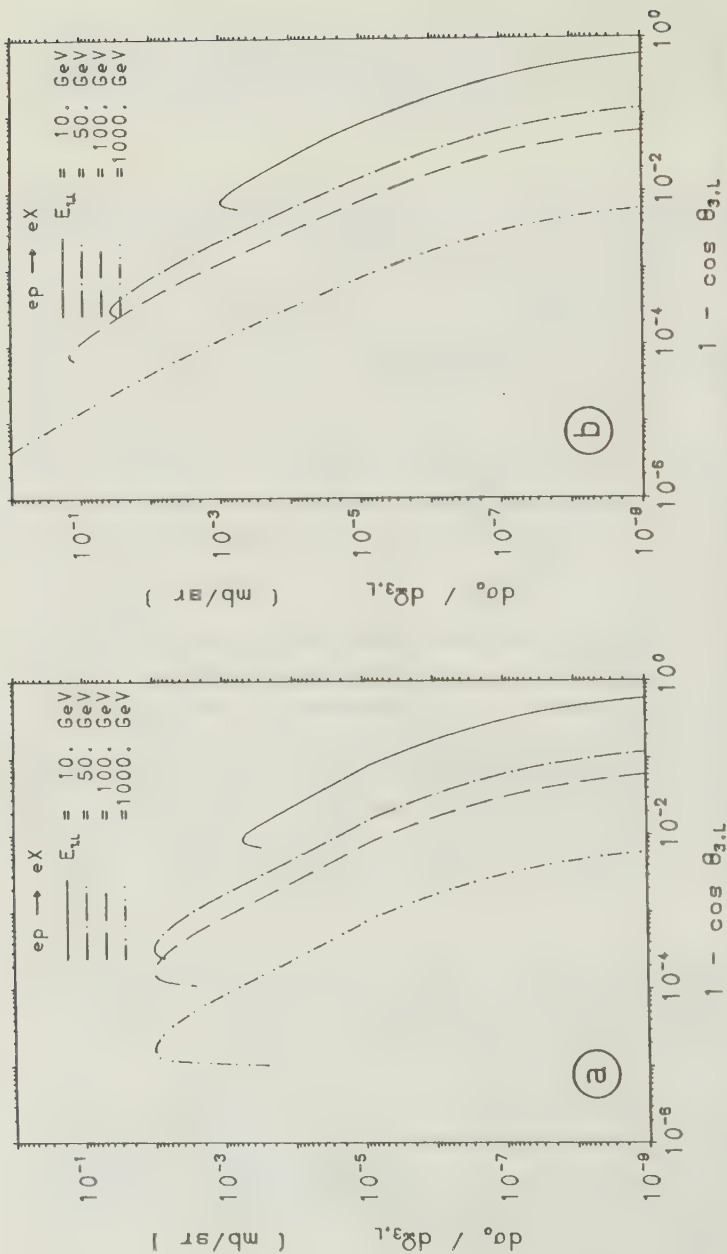


Abb. 5 - 13 : Unpolarisierter differentieller Wirkungsquerschnitt (vgl. (5.48)) für inklusive Elektron-Proton-Streuung im Laborsystem. Über die Energie der auslaufenden Elektronen ist integriert. Parameter: Einschußenergie $E_{1,L}$ der Elektronen. Abb. a) entspricht dem Phasenraum "a", Abb. b) dem Phasenraum "b" (s. Text).

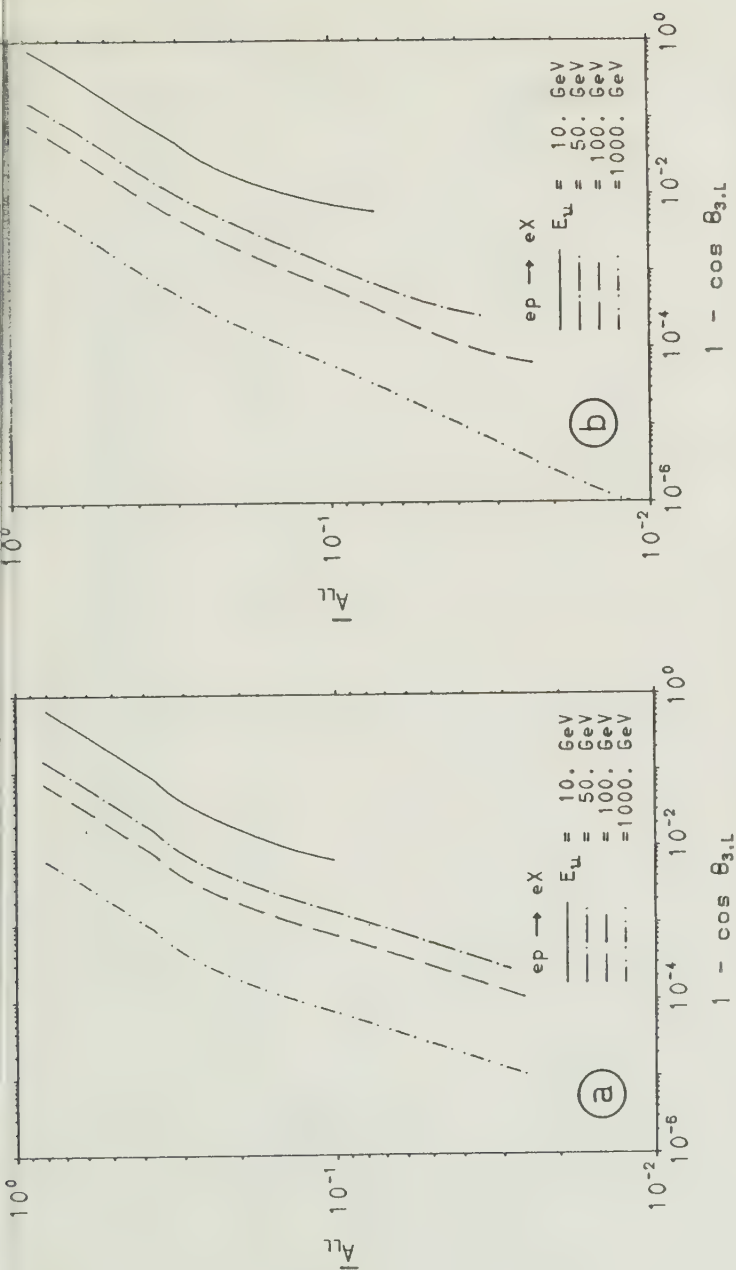


Abb. 5-14 : Asymmetriekoeffizient $\bar{A}_{1L}$ (vgl. (5-48)) für inklusive Elektron-Proton-Streuung als Funktion des Streuwinkels $\theta_{3,L}$. Über die Energie der auslaufenden Elektronen ist integriert. Abb. a) entspricht dem Phasenraum "a", Abb. b) dem Phasenraum "b".

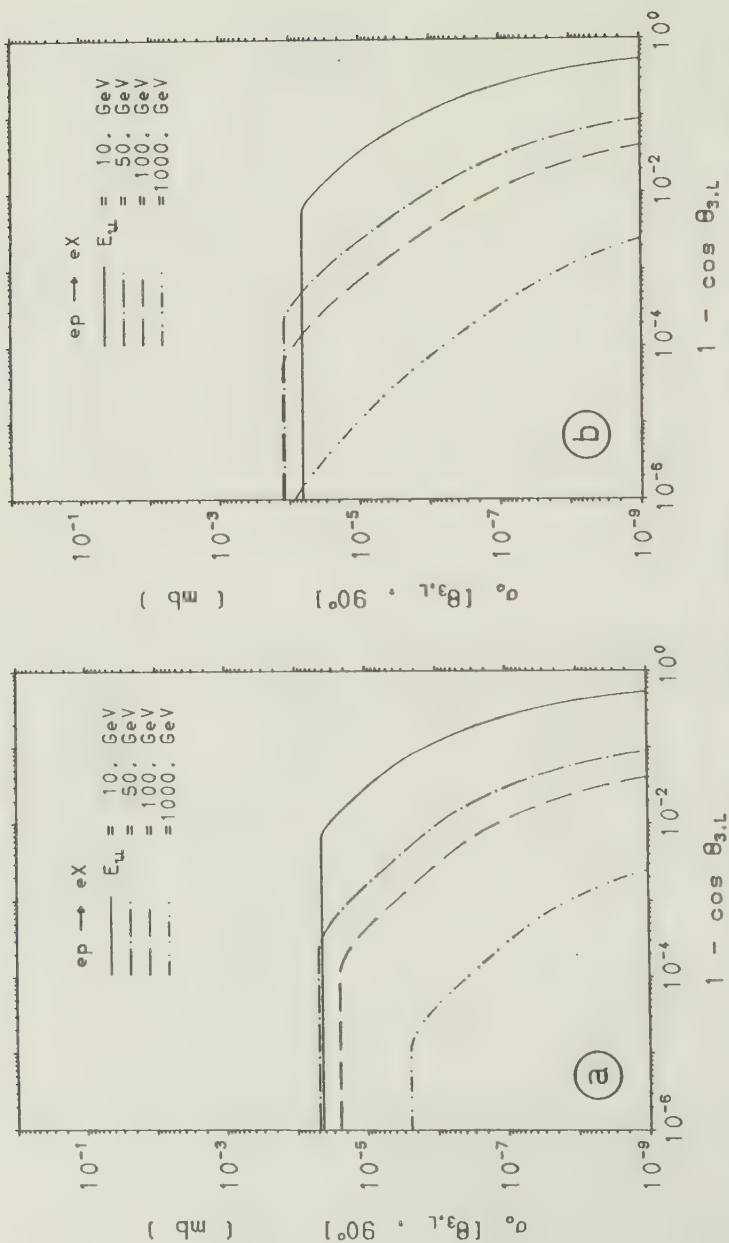


Abb. 5 - 15 : Integrierter unpolarisierter Wirkungsquerschnitt $\sigma_0[\theta_{3,L}, 90^\circ]$ für inklusive e-p-Streuung als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,L}$. Abb. a) (b) entspricht dem Phasenraum "a" ("b"). $\sigma_0[\dots]$ ist der über $\theta_{3,L}$ und $\phi_{3,L}$ integrierte Streuquerschnitt aus Abb. 5 - 13.

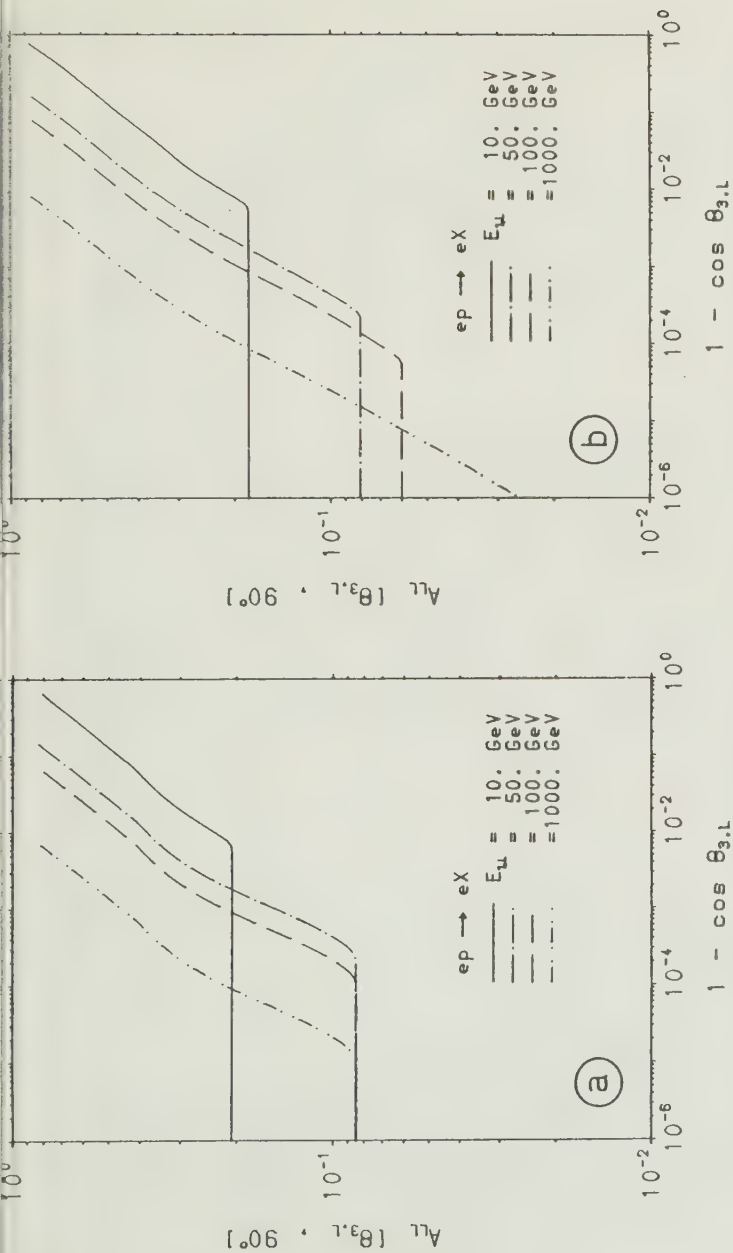


Abb. 5 - 16 : Asymmetriekoeffizient $A_{LL}[\Theta_{3,L}, \Theta_{3,L} = 90^\circ]$ des integrierten Wirkungsquerschnittes (Def. siehe (5-5c) mit der Ersetzung $A_{LL} \rightarrow A_{LL}$) für inklusive e-p-Streuung als Funktion der Integrationsgrenze $\Theta_{3,L}$. Abb. a) ist mit dem Phasenraum "a", Abb. b) mit "b" berechnet.

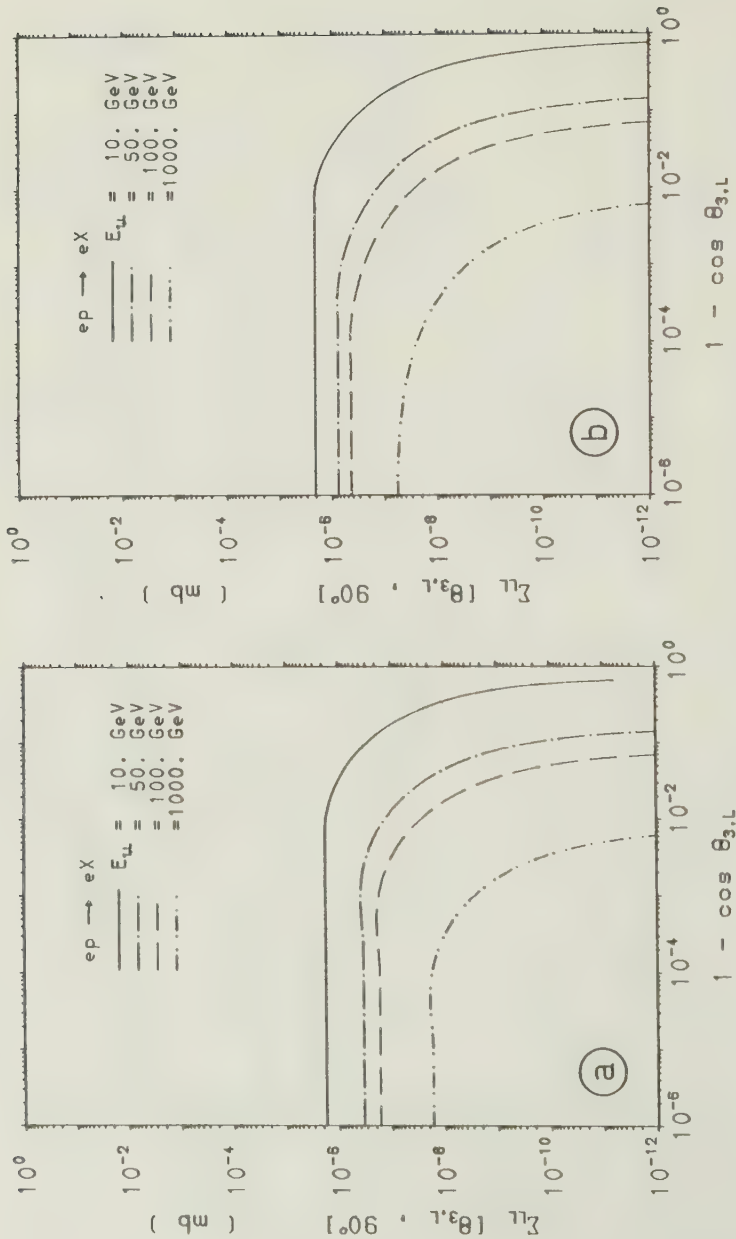


Abb. 5 - 17 : Effektiver Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\theta_{3,L}, 90^\circ] \equiv \sigma_o[\dots] \times A_{LL}^2[\dots]$ (Definition siehe (5-7) mit $A_{LL} - A_{LL}$) für inklusive e-p-Streuung als Funktion der Integrationsgrenze $\theta_{3,L}$. Abb. a) entspricht dem Phasenraum "a", Abb. b) dem Phasenraum "b".

$d\sigma_o / d\Omega_{3,L}$ ist in Abb. 5 - 13 als Funktion von

$$1 - \cos\Theta_{3,L} = 2 \sin^2(\Theta_{3,L} / 2)$$

graphisch dargestellt. Aus dem Winkelbereich, über den sich die Kurve bei einer bestimmten Einfallsenergie erstreckt, kann man entnehmen, in welchen Winkelbereich Elektronen gestreut werden. Für das Abknicken der Kurven sind die Grenzen des Phasenraumes verantwortlich. Die Funktion $\bar{A}_{LL}$ ist in den Abbn. 5 - 14 aufgetragen. $\bar{A}_{LL}$ liegt für große Streuwinkel nahe bei 1 und wird mit abnehmendem Streuwinkel rasch kleiner.

Die zweite Integration erstreckt sich über den Streuwinkel $\Theta_{3,L}$. Ausgehend von $\Theta_{3,L} = 90^\circ$ als oberer Integrationsgrenze ist der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\Theta_{3,L}, 90^\circ]$ als Funktion der unteren Integrationsgrenze $\Theta_{3,L}$ in Abb. 5 - 15 wiedergegeben. Da der einfach-differentielle Wirkungsquerschnitt für kleine und große Streuwinkel verschwindet (siehe Abb. 5 - 13), beginnen die Kurven für den doppelt-integrierten Wirkungsquerschnitt erst bei Streuwinkeln kleiner als $\Theta_{3,L} = 90^\circ$ und gehen ab einem bestimmten Winkel in eine Konstante über. Dieselbe Ursache haben die Plateaus in Abb. 5 - 16. Die Abbildung zeigt den Asymmetriekoeffizienten $A_{LL}[\Theta_{3,L}, 90^\circ]$ für den doppelt-integrierten Wirkungsquerschnitt. $A_{LL}[\Theta_{3,L}, 90^\circ]$ ist durch (5-5b) definiert, wobei man die Asymmetrie A_{LL} durch $\bar{A}_{LL}$ aus (5-48) zu ersetzen hat.

In Abb. 5 - 17 ist der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\Theta_{3,L}, 90^\circ]$ aufgetragen. Er ist für inelastische Streuung zwar deutlich größer als für elastische e-p-Streuung (Abb. 5 - 10e), aber immer noch wesentlich kleiner als bei den Paarvernichtungs- und Streuprozessen aus den Abschnitten 5.4.1 bis 5.4.3 : Man erhält $\Sigma_{LL}[\dots] \leq 10^{-6}$ mb. Anzu-merken ist, daß eine Polarisationsmessung mittels inelastisch in die Phasenräume "a" und "b" gestreuter Elektronen zusätzlich zur Energie-messung eine Winkelbestimmung von Streuwinkeln der Größenordnung mrad erfordert (vgl. die Abbn. 5 - 13 bis 5 - 17: $1 - \cos\Theta_{3,L} = 10^{-3}$ entspricht einem Streuwinkel von 45 mrad, $1 - \cos\Theta_{3,L} = 10^{-5}$ entspricht 4.5 mrad). Inelastische e-p-Streuung ist nicht nur weniger effektiv, sondern auch experimentell aufwendiger als die früher besprochenen

Analyseprozesse.

Es bleibt zu diskutieren, inwieweit sich die Situation ändert, wenn man auf die Bedingung $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ verzichtet und bis $Q^2 = Q_{\min}^2$ integriert. In diesem Fall ist eine Streuwinkelmessung überflüssig. Da die Strukturfunktionen und Polarisationsasymmetrien für $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ nur unvollständig bekannt sind, können im folgenden nur Abschätzungen angegeben werden.

Im Bereich $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ fällt die Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ ab. Gleichzeitig steigt der Faktor $1/Q^4$ in (5-42b) stark an. Man nähert sich dem Grenzfall der Streuung reeller Photonen an Protonen. Hier diskutiert man den Wirkungsquerschnitt am besten in der Form (5-43a). Nach [48] geht für $Q^2 \rightarrow 0$ der transversale Wirkungsquerschnitt $\sigma_T(\nu, Q^2)$ gegen $\sigma^{YP}(\nu)$, den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung reeller Photonen der Energie ν an Protonen; der Wirkungsquerschnitt $\sigma_L(\nu, Q^2)$ für die Streuung longitudinal polarisierter virtueller Photonen verschwindet im Bereich kleiner Werte für Q^2 proportional zu Q^2 . Diese Aussagen über das asymptotische Verhalten werden durch Experimente gestützt. So hat man für $\nu = 184 \text{ GeV}$ in Myon-Proton-Streuung experimentell festgestellt [49], daß sich die Funktion $\sigma_T + \epsilon \sigma_L$ im Bereich $Q_{\min}^2 < Q^2 < 0.4 \text{ GeV}^2$ durch

$$\sigma_T + \epsilon \sigma_L = \frac{A}{1 + Q^2/M^2} \quad (5-49)$$

mit $A = (132 \pm 13) \mu\text{b}$ und $M^2 = (0.09 \pm 0.03) \text{ GeV}^2$ beschreiben läßt. A ist zu vergleichen mit dem totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma^{YP}(\nu)$ für Photon-Proton-Streuung, der für $\nu > 3 \text{ GeV}$ annähernd unabhängig von ν ist und einen Wert von ca. $110 \mu\text{b}$ annimmt [48].

Mit Hilfe der Parametrisierung (5-49) kann man das mit σ_R bezeichnete Integral über den Teil des Phasenraumes mit $Q_{\min}^2 < Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ und $0.1 \times E_{1,L} < \nu < 0.9 \times E_{1,L}$ abschätzen. Aus (5-43) erhält man unter der Voraussetzung $\nu^2 \gg Q^2$ und $4 E_{1,L} E_{3,L} \gg Q^2$ einen Wert von

$$\sigma_R \approx 6 \mu b. \quad (5-50)$$

Ein Vergleich mit Abb. 5 - 15 zeigt, daß σ_R ungefähr um einen Faktor 100 größer ist als der Beitrag der Phasenräume "a" und "b".

Die Funktion A_{LL} ist für $Q^2 \rightarrow 0$ zu wenig untersucht, um die Diagramme 5 - 16 und 5 - 17 zu kleineren Winkeln hin vervollständigen zu können. Nur im Bereich der Nukleonenresonanzen existieren Messungen bei kleinen Q^2 -Werten [57]. Dort zeigt die Größe A_{LL}/D (vgl. (5-47a)) einen Vorzeichenwechsel. Es bleibt daher offen, ob die Mitnahme kleinerer Q^2 -Werte ein Ansteigen des effektiven Wirkungsquerschnittes Σ_{LL} gegenüber den Werten in Abb. 5 - 17 zur Folge haben würde. Man kann lediglich unter Benützung von (5-50) die Abschätzung

$$\Sigma_{LL} \equiv \sigma_0 A_{LL}^2 \lesssim \sigma_R \approx 6 \mu b \quad (5-51)$$

angeben, wobei sich der Grenzwert nur für den - nicht zu erwartenden - Fall $A_{LL} \equiv 1$ erreichen ließe. Inelastische e-p-Streuung ist auf jeden Fall weniger effektiv als beispielsweise Möller- oder Bhabha-Streuung.

5.5. Zusammenfassung : Eignung der verschiedenen Reaktionen für die Polarisationsmessung

In Tab. 5 - 3 ist die Größenordnung des effektiven Wirkungsquerschnittes $\Sigma_{LL}[\dots]$ für die verschiedenen in Kapitel 5 behandelten Analyseprozesse in Abhängigkeit von der Energie $E_{1,L}$ der einlaufenden Elektronen bzw. Positronen zusammengestellt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Targetteilchen im Laborsystem ruhen. Mit Hilfe von (2-113) kann man die Anzahl N_0 der für eine Messung der longitudinalen Polarisation erforderlichen Teilchen angeben.

	$\cos\theta_{\min}$	$\cos\theta_{\max}$	$E_{i,L} / \text{GeV}$			
			1.	10.	100.	1000.
$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$	1.	- 1.	-	-	5×10^{-4}	5×10^{-5}
$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$	1.	- 1.	-	-	2×10^{-5}	6×10^{-5}
$e^+ e^- \rightarrow 2 \gamma$	1.	- 1.	0.92	0.122	1.5×10^{-2}	1.8×10^{-3}
$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$	0.8	- 1.	0.2	0.02	2×10^{-3}	2×10^{-4}
$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$	0.8	0.	0.4	0.04	4×10^{-3}	4×10^{-4}
elast. e-p- Streuung	0.9	- 1.	5×10^{-5}	10^{-7}	10^{-12}	$< 10^{-15}$
inel. e-p- Streuung	*)	*)	-	2×10^{-6}	2×10^{-7}	2×10^{-8}

Tab. 5 - 3 : Der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ in mb für verschiedene Prozesse in Abhängigkeit von der Energie der einlaufenden Teilchen. (*) $\Sigma_{LL}[\dots]$ -Werte für den Phasenraum "a".)

In die Beurteilung der Analysierfähigkeit eines Streuprozesses geht der Polarisationsgrad des Targets ein. Nach (2-112) gilt

$$\Sigma_{\text{exp}} = \Sigma_{LL} \times (s_{\parallel}^{(2)})^2. \quad (2-112)$$

Mit den Bemerkungen über den experimentell erreichbaren Polarisationsgrad von Elektronen- und Protonen-Targets aus Abschnitt 3.4 folgt

$$\Sigma_{\text{exp}} \approx 0.01 \times \Sigma_{\text{LL}}.$$

Der Targetfaktor T für ruhende Teilchen besteht nach (3-2) aus dem Produkt von Teilchendichte und Targetdicke, also aus der Anzahl der Targetteilchen pro Flächeneinheit. Für T muß man allerdings eine obere Grenze T_S angeben, indem man für die Targetdicke die Strahlungslänge X_S einsetzt. Denn für $T \geq T_S$ wird (2-113) ungültig: Bei der Ableitung von (2-113) ist vorausgesetzt, daß die Streuwahrscheinlichkeit klein gegen Eins ist und als Produkt aus Wirkungsquerschnitt und Targetfaktor geschrieben werden kann. Beim Durchlaufen einer Flugstrecke in der Größenordnung der Strahlungslänge wird diese Bedingung verletzt, da die Elektronen hierbei mit der Wahrscheinlichkeit $O(1)$ Bremsstrahlung emittieren. (Bremsstrahlung dominiert für Elektronen der Energie $E_{1,L} \geq 600 \text{ MeV/Z}$ den Energieverlust in einem Target mit Kernladungszahl Z .)

Die Größen X_S (siehe [58a]) und T_S sind materialabhängig und für H, Fe und Pb in Tab. 5 - 4 zusammengestellt. T_S ist von der Größenordnung 10^{24} Elektronen/cm².

Element	$X_S \text{ (g / cm}^2\text{)}$	$T_S \text{ (Elektronen / cm}^2\text{)}$
H	63.0470	$38. \times 10^{24}$
Fe	13.8389	3.85×10^{24}
Pb	6.3688	1.52×10^{24}

Tab. 5 - 4 : Strahlungslänge X_S und zugehöriger Targetfaktor T_S für Elektronentargets.

Mit $\Sigma_{\text{exp}} = 0.01 \times \Sigma_{\text{LL}}$ und $T = 10^{23} \text{ Elektronen / cm}^2$ erhält man für den effektivsten Prozess ($e^+ e^- \rightarrow 2 \gamma$)

$$N_0 \gtrsim 10^5 \times \frac{E_{1,L} / \text{GeV}}{(\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2} . \quad (5-52)$$

Das ist eine im Vergleich mit den Zählraten in Hochenergie-Experimenten unrealistisch hohe Zahl. Die in diesem Kapitel besprochenen und in Tab. 5-3 zusammengestellten Analyseprozesse eignen sich unter den heutigen experimentellen Voraussetzungen nicht zur Messung der Endzustandspolarisation.

6. POLARISATIONSBESTIMMUNG VON ELEKTRONEN (POSITRONEN) MITTELS STREUUNG AN POLARISIERTEN PHOTONEN

In den Kapiteln 4 und 5 wurde gezeigt, daß die Streuung an massiven Target-Teilchen ungeeignet ist zur Messung der Polarisation hochenergetischer gestreuter Elektronen (Positronen). Die Ereignisraten für die diskutierten Analyseprozesse sind zu gering.

In diesem Kapitel wird die Streuung hochenergetischer Elektronen an Photonen untersucht. Aus zwei Gründen bietet es sich an, Compton-Streuung näher zu betrachten:

1) Die Streuung von Elektronen an zirkular polarisierten Laser-Photonen ist von der Polarisation hochenergetischer Elektronen abhängig. Diese Eigenschaft wird zur Messung der natürlichen Polarisation der Teilchenstrahlen in den Speicherringen SPEAR [21,59] und PETRA [60,61] ausgenutzt. Sowohl die longitudinale [60] als auch die transversale [21,60,61] Komponente der Strahlpolarisation lassen sich experimentell bestimmen. (Man stellt fest, daß die Teilchenstrahlen transversal polarisiert sind und daß der Polarisationsgrad energieabhängig ist.)

2) Auch lassen sich große Ereignisraten erzielen, wenn man hochenergetische Elektronen auf stark fokussierte Photonbündel von Hochleistungs-Lasern (Laserleistung $\approx 10^{12}$ Watt, Pulsenergie ≈ 100 Joule) schießt. Darauf beruht ein Vorschlag zur Erzeugung eines Strahls hochenergetischer Photonen an den Linearbeschleunigeranlagen VLEPP und SLC [28]: Man läßt die beschleunigten Positronen (Teilchenenergie 50 GeV am SLC) das Photonenbündel eines solchen Hochleistungs-Lasers passieren, sodaß ein großer Bruchteil von ihnen eine Compton-Streuung erfährt. Dabei entstehen bevorzugt harte γ -Quanten in Flugrichtung der Positronen. Zur Untersuchung hochenergetischer e- γ -Streuung sollen diese dann mit den entgegenkommenden beschleunigten Elektronen kollidieren.

Im folgenden wird untersucht, ob diese günstigen Voraussetzungen zur Messung der Polarisation von hochenergetischen Elektronen (Positronen) im Endzustand eines Streuexperimentes ausreichen. Dabei behandeln wir in den Abschnitten 6.1 und 6.2 zunächst den Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung und das Energiespektrum der gebildeten harten γ -Quanten für den allgemeinen Fall nicht kollinear kollidierender Elektronen und Laser-Photonen. In Abschnitt 6.3 wird ein Vorschlag gemacht, wie man die Polarisationsabhängigkeit des Energiespektrums zur Messung der Endzustandspolarisation ausnutzen könnte. In Abschnitt 6.4 schließlich wird untersucht, wie sich das in den vorangegangenen Abschnitten beschriebene Energiespektrum ändert, wenn man die Wegstrecke des Elektrons im Lasertarget soweit vergrößert, daß Mehrfachstreuung der Elektronen nicht mehr vernachlässigbar ist.

6.1. Näherungsausdruck für die Compton-Streuung an Laserphotonen bei nicht-kollinearer Kollision

Bei der Verwendung von Compton-Streuung zur Messung der Polarisation gestreuter hochenergetischer Elektronen kann man nicht voraussetzen, daß die Teilchen kollinear aufeinanderprallen. Würde man nur kollineare Kollisionen als Analysestreuprozess zulassen, so müßte man den Phasenraum für die Streuteilchen der Primärreaktion sehr klein machen. Die Folge wäre eine niedrige Ereignisrate. Im folgenden werden deshalb auch nicht-kollineare Kollisionen zwischen Elektronen und Laserphotonen als Analysestreuprozesse betrachtet.

Zur Ableitung einer Formel für den Wirkungsquerschnitt bei nicht-kollinear kollidierenden Teilchen erweist es sich als nützlich, zwischen dem Laborsystem (Index "L") und dem Ruhssystem des Elektrons (Index "R") hin- und herzupendeln. Im Laborsystem ist die Meßapparatur in Ruhe. Hier werden die Streuwinkel und Energien der Teilchen gemessen. Im Ruhssystem des Elektrons werden die kinematischen Verhältnisse besonders einfach. Dieses System ist besonders geeignet zur

Ableitung von Nährausdrücken für den Wirkungsquerschnitt schief einfallender Laserphotonen.

6.1.1. Compton-Streuquerschnitt im Ruhssystem des Elektrons

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß der Impulsvektor $\mathbf{p}_{2,R}$ des Laserphotons im Ruhssystem des Elektrons in Richtung der negativen z-Achse zeigt. Die Richtung des Impulses $\mathbf{p}_{3,R}$ des gestreuten Photons werde durch den Polarwinkel $\Theta_{3,R}$ und den Azimutwinkel $\Phi_{3,R}$ beschrieben. Der Wirkungsquerschnitt für den Compton-Streuprozess im Ruhssystem ist dann von der Form (2-89). (Eine auf Compton-Streuung spezialisierte Form der Gl. (2-89) ist in Anhang B, Gl. (B-56) zu finden.) Da QED-Prozesse paritätserhaltend sind, verschwinden einige Terme des allgemeinen Ausdrucks (siehe (2-83) bzw. (B-57)). Das normierte Betragsquadrat des Matrixelementes wird zu

$$|ME|_{\text{Norm}}^2 = 1 + \sqrt{3/2} s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \hat{R}(1,0;1,0) \quad (6-1a)$$

$$\begin{aligned} & + \sqrt{2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} \sin(\Phi_{3,R} - \psi^{(1)}) \text{Im} [\hat{R}(1,1;0,0) + \hat{R}(1,1;2,0) / \sqrt{2}] \\ & - \sqrt{3} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_{3,R} - \psi^{(1)}) \text{Re} \hat{R}(1,1;1,0) \\ & + \sqrt{3} s_{\perp}^{(2)} \cos(2\Phi_{3,R} + 2\alpha^{(2)}) \text{Re} \hat{R}(0,0;2,2) \\ & + \sqrt{3} s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \sin(2\Phi_{3,R} + 2\alpha^{(2)}) \text{Im} \hat{R}(1,0;2,2) \\ & - \sqrt{3/2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \{ \sin(\Phi_{3,R} + \psi^{(1)} + 2\alpha^{(2)}) \text{Im} \hat{R}(1,1;2,2) \\ & \quad - \sin(3\Phi_{3,L} - \psi^{(1)} + 2\alpha^{(2)}) \text{Im} \hat{R}(1,1;2,-2) \} \end{aligned}$$

mit

$$\hat{R}(J_1, M_1; J_2, M_2) \equiv \frac{R(J_1, M_1; J_2, M_2)}{R(0,0;0,0) + R(0,0;2,0) / \sqrt{2}} \quad (6-1b)$$

Die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ sind nach (2-81) (bzw. (B-58)) als Summen über Produkte von Helizitätsamplituden definiert. Sie enthalten (neben Energiefaktoren) nur noch den Polarwinkel $\Theta_{3,R}$ des Impulses $\mathbf{p}_{3,R}$ des gestreuten Photons. Die Abhängigkeit vom Azimutwinkel $\Phi_{3,R}$ ist in (6-1a) explizit angegeben. Der Zusammenhang zwischen den Polarisationsparametern $s_{\parallel}^{(1)}$, $s_{\perp}^{(1)}$ und $\psi^{(1)}$ des Elektrons und seinem Polarisationsvektor $\mathbf{S}^{(1)}$ ist in (2-45) und (2-46) beschrieben; die Bedeutung der Polarisationsparameter $s_{\parallel}^{(2)}$, $s_{\perp}^{(2)}$ und $\psi^{(2)} = 2\alpha^{(2)}$ des Photons ist im Zusammenhang mit der Darstellung (2-68) der Dichtematrix erklärt. Sämtliche Größen zur Beschreibung der Polarisation beziehen sich auf die lokalen Koordinatensysteme der Teilchen.

In der niedrigster Ordnung der QED sind die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ reell (vgl. (2-84) oder (B-50) mit zugehöriger Erklärung). Der Wirkungsquerschnitt (6-1a) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{3,R}} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega_{3,R}} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\Theta_{3,R}) \right. \\ &\quad + s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_{3,R} - \psi^{(1)}) A_{TL}(\Theta_{3,R}) \\ &\quad \left. + s_{\perp}^{(2)} \cos(2\Phi_{3,R} + 2\alpha^{(2)}) A_{0T}(\Theta_{3,R}) \right\}. \end{aligned} \quad (6-2)$$

Die Definition der Asymmetriekoeffizienten A_{LL} , A_{TL} und A_{0T} durch die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ entnimmt man einem Vergleich von (6-2) mit (6-1a). Der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt $d\sigma_0/d\Omega_{3,R}$ und die nur von $\Theta_{3,R}$ abhängigen Asymmetriekoeffizienten haben die folgende explizite Form, die sich als Spezialfall aus eigener Berechnung [44] in Übereinstimmung mit der Literatur [62] ergibt:

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_{3,R}} = \frac{r_e^2}{2} \frac{E_{3,R}^2}{E_{2,R}^2} \times I, \quad (6-3a)$$

$$\text{mit } I \equiv \frac{E_{2,R}}{E_{3,R}} + \frac{E_{3,R}}{E_{2,R}} - 1 + \cos^2 \Theta_{3,R},$$

$$A_{LL} = - (1 + \cos \Theta_{3,R}) \cos \Theta_{3,R} (E_{2,R} + E_{3,R}) / (m_1 I), \quad (6-3b)$$

$$A_{TL} = - (1 + \cos \Theta_{3,R}) \sin \Theta_{3,R} E_{3,R} / (m_1 I), \quad (6-3c)$$

$$A_{0T} = + \sin^2 \Theta_{3,R} / I \quad (6-3d)$$

$$\text{und } E_{3,R} = \frac{E_{2,R}}{1 + (1 + \cos \Theta_{3,R}) E_{2,R} / m_1}. \quad (6-3e)$$

Das Photon wird um den Winkel $\pi - \Theta_{3,R}$ gestreut. $E_{3,R}$ ist seine Energie im Ruhssystem nach der Streuung.

6.1.2. Polarisations-Parameter und kinematische Größen im Laborsystem

Kinematische Größen

Im Laborsystem fliegt das hochenergetische Elektron (Teilchen 1) mit der Energie $E_{1,L} = O(\text{GeV})$ in Richtung der positiven z-Achse,

$$\mathbf{p}_{1,L} = (0, 0, |\mathbf{p}_{1,L}|),$$

und trifft auf ein Laser-Photon (Teilchen 2) mit der Energie $E_{2,L} = O(\text{eV})$ und dem Impuls

$$\mathbf{p}_{2,L} = E_{2,L} (\sin \Theta_{2,L} \cos \Phi_{2,L}, \sin \Theta_{2,L} \sin \Phi_{2,L}, \cos \Theta_{2,L})$$

(vgl. Abb. 2 - 6, Figur B). Die Impulse der einfallenden Teilchen sind nicht als kollinear vorausgesetzt.

Aus Energie- und Impulserhaltung läßt sich die Energie $E_{3,L}$ der gestreuten Photonen in Abhängigkeit vom Streuwinkel berechnen. Nimmt man an, daß das Photon in der y - z -Ebene unter dem Polarwinkel $\Theta_{2,L}$ einfällt, d.h. $\Phi_{2,L} = 90^\circ$, so erhält man durch Quadrieren der Gleichung $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$ den Ausdruck

$$E_{3,L} = E_{2,L} \times [E_{1,L} - |\mathbf{p}_{1,L}| \cos \Theta_{2,L}] \quad (6-4)$$

$$/ [E_{1,L} - |\mathbf{p}_{1,L}| \cos \Theta_{3,L} + E_{2,L}(1 - \cos \Theta_{2,L} \cos \Theta_{3,L} + \sin \Theta_{2,L} \sin \Theta_{3,L} \sin \Phi_{3,L})] .$$

$E_{3,L}$ ist von der gleichen Größenordnung wie $E_{2,L}$, solange man große Streuwinkel $\Theta_{3,L}$ betrachtet. Für $\Theta_{3,L} = O(1/\gamma_{1,L})$, mit $\gamma_{1,L} = E_{1,L}/m_1$, hingegen - also nahe der Photonen-Rückwärts-Streuung - kommt der Nenner in die Größenordnung von $E_{2,L}$. Wegen $E_{1,L} \approx |\mathbf{p}_{1,L}|$ für hochenergetische Elektronen wird der Ausdruck $E_{1,L} - |\mathbf{p}_{1,L}| \cos \Theta_{3,L}$ ja sehr klein. Die Energie $E_{3,L}$ der gestreuten Photonen wächst stark an. Es entstehen harte rückgestreute γ -Quanten. (Für $\Theta_{2,L} = \pi$ erhält man aus (6-4) die Formel (3-15).)

Den Anstieg der Energie kann man deutlich machen anhand eines Näherungsausdruckes für Gl. (6-4), der im Bereich $\Theta_{3,L} = O(1/\gamma_{1,L})$ gültig ist. Dazu bezieht man - wie in Gl. (3-16) - den Emissionswinkel $\Theta_{3,L}$ auf die Winkелеinheit $1/\gamma_{1,L}$ und nennt die Maßzahl bezüglich dieser Einheit y . Die Größe y wird auch als reduzierter Streuwinkel bezeichnet.

$$\Theta_{3,L} = y / \gamma_{1,L} . \quad (6-5)$$

Außerdem gilt

$$|\mathbf{p}_{1,L}| = E_{1,L} \left(1 - \frac{1}{2\gamma_{1,L}^2} \right) . \quad (6-6)$$

Gl. (6-4) wird mit (6-5) und (6-6) zu

$$E_{3,L} = E_{1,L} \frac{X}{1 + X + \gamma^2 + O(1/\gamma_{1,L})} \quad (6-7a)$$

mit

$$X \equiv \frac{2p_1 p_2}{m_1^2} \approx \frac{2E_{1,L} E_{2,L}}{m_1^2} (1 - \cos\Theta_{2,L}) . \quad (6-7b)$$

Die Formeln (6-7) verallgemeinern (3-17) und (3-18). Die Abhängigkeit der Energie $E_{3,L}$ der rückgestreuten Photonen vom Azimutwinkel $\Phi_{3,L}$ ist in dem Term $O(1/\gamma_{1,L})$ enthalten und vernachlässigbar. In dieser Näherung wird die Energie $E_{3,L}$ - bei festgehaltener Energie der einfallenden Teilchen - von den Polarwinkeln $\Theta_{2,L}$ und $\Theta_{3,L}$ festgelegt.

Dem kinematischen Parameter X kommt in den folgenden Abschnitten eine zentrale Rolle zu bei der Diskussion von Compton-Streuung als Analyseprozess für die Bestimmung der Polarisierung von Elektronen. Er erreicht für Elektronen ab 30 GeV und für Photonen von etwa 1 eV Werte größer als 0.5. (6-7a) macht deutlich, daß in dem Fall Photonen, die in einen Kegel mit Öffnungswinkel $\Theta_{3,L} = 1/\gamma_{1,L}$ (d.h. $\gamma = 1$) abgestrahlt werden, 20 % und mehr der Energie der einfallenden Elektronen erhalten. Geht man zu größeren Streuwinkeln über ($\gamma \gg 1$), so wird $E_{3,L}$ rasch kleiner.

Polarisationsparameter

Die Polarisationsparameter von Elektron und Photon vor dem Compton-Streuprozess beziehen sich auf die lokalen Koordinatensysteme (LKS) der Teilchen. Deren Lage hängt von der Impulsrichtung von Elektron und Photon ab (vgl. Abschnitt 2.1.1, insbesondere Abb. 2-1). Da sich die Elektronen in Richtung der positiven z-Achse bewegen, fällt für

sie das LKS mit dem Laborsystem zusammen. Für die Photonen entsteht das LKS aus dem Laborsystem durch Drehung der z-Achse des Laborsystems in die Richtung des Photonenimpulses $\mathbf{p}_{2,L}$. Die Drehachse steht senkrecht auf der z-Achse und auf $\mathbf{p}_{2,L}$ (vgl. Gl. (2-6) ff.).

6.1.3. Transformation der kinematischen Größen und der Polarisationsparameter beim Übergang vom Laborsystem zum Ruhssystem des Elektrons

Kinematische Größen

Die Energie der Laserphotonen im Ruhssystem des Elektrons läßt sich gemäß (6-7b) durch die relativistische Invariante X ausdrücken.

$$E_{2,R} = X m_1 / 2. \quad (6-8)$$

Durch Lorentz-Transformation der Impulskomponenten für die Photonen zeigt man die folgende Beziehung zwischen den Winkeln $\Theta_{i,L}$ und $\Theta_{i,R}$, welche die Impulsvektoren $\mathbf{p}_{i,L}$ und $\mathbf{p}_{i,R}$ der Photonen mit der z-Achse im Laborsystem bzw. im Ruhssystem bilden.

$$\tan \Theta_{i,R} = \frac{\sin \Theta_{i,L}}{\gamma_{1,L} (\cos \Theta_{i,L} - \beta_{1,L})} = \frac{p_{\perp i,R}}{p_{zi,R}} \quad (6-9)$$

mit

$$\beta_{1,L} = |\mathbf{p}_{1,L}| / E_{1,L} \approx 1 - 1 / (2\gamma_{1,L}^2).$$

Dieser Gleichung entnimmt man:

1) Die harten rückgestreuten Laserphotonen bilden im Laborsystem einen sehr kleinen Winkel mit der z-Achse ($\Theta_{3,L} = O(1/\gamma_{1,L})$). Drückt man $\Theta_{3,L}$ in Einheiten von $1/\gamma_{1,L}$ aus (vgl. (6-5)), dann läßt sich (6-9) für $\gamma/\gamma_{1,L} \ll 1$ ($\gamma_{1,L} \gg 1$) und $|1 - \gamma^2| \gg 1/\gamma_{1,L}^2$ umformen zu

$$\tan\Theta_{3,R} = \frac{2y}{1-y^2} \times (1 + O(y^2/\gamma_{1,L}^2)) \quad (6-10a)$$

oder zu dem äquivalenten Ausdruck

$$\cos\Theta_{3,R} = \frac{1-y^2}{1+y^2} \times (1 + O(y^2/\gamma_{1,L}^2)) . \quad (6-10b)$$

Der schmale Kegel (Öffnungswinkel $y = O(1)$), in den die harten Photonen im Laborsystem gestreut werden (vgl. (6-7a)), nimmt im Ruhssystem fast den gesamten Raumwinkelbereich ein. Ausgenommen ist ein schmaler Kegel im Ruhssystem um den Winkel $\Theta_{3,R} = \pi$.

2) Betrachtet man Laserphotonen, deren Einfallswinkel $\Theta_{2,L}$ im Laborsystem durch die Bedingung $1/\gamma_{1,L} \ll \Theta_{2,L} \leq \pi$ eingeschränkt ist (d.h. die Laserphotonen dürfen sich im Laborsystem nicht parallel zu den einlaufenden Elektronen bewegen), so sieht man, daß deren Impulsrichtung im Ruhssystem annähernd parallel zur negativen z-Achse ist. Denn nach (6-9) ist

$$\tan\Theta_{2,R} \approx -O(1)/\gamma_{1,L} \quad (6-11)$$

und damit $\Theta_{2,R} \approx \pi$.

Polarisationsparameter

Die Transformation von Ruhssystem auf das Laborsystem entspricht einer aktiven drehungsfreien Lorentz-Transformation in Richtung der positiven z-Achse: Das ruhende Elektron erhält einen Impuls $\mathbf{p}_{1,L} = (0, 0, |\mathbf{p}_{1,L}|)$, die Energie des Laserphotons wird verringert. Das Verhalten der Dichtematrix unter solchen reinen Lorentz-Transformationen ist in den Anhängen A und B untersucht. Massive und masselose Teilchen sind trennend zu behandeln.

Die Dichtematrix des Elektrons im Anfangszustand des Compton-Streuprozesses ändert sich beim Übergang vom Laborsystem zum Ruhssystem nicht, da der Geschwindigkeitsvektor der drehungsfreien Lorentz-Transformation mit der Impulsrichtung zusammenfällt. Genauer: Nach Gl. (A-31) besteht die Wigner-Rotation R_W in dem vorliegenden Fall aus der Einheitsmatrix. Mit

$$D_{\mu\lambda}^{(s)}(R_W = 1) = \delta_{\mu\lambda}$$

folgt die Behauptung aus Gl. (B-10).

Ebenso bleibt die Dichtematrix des einfallenden Laserphotons beim Übergang vom Laborsystem zum Ruhssystem des Elektrons erhalten. Beweis: Nach Abschnitt A.2.4, Gl. (A-54), wird der Helizitätszustand eines masselosen Teilchens mit beliebigem Impuls $\mathbf{p}$ bei einer drehungsfreien Lorentz-Transformation in z -Richtung nicht verändert. Es tritt auch kein Phasenfaktor auf. (Anders bei massiven Teilchen mit beliebiger Impulsrichtung: Hier vermischen sich die Helizitätszustände bei Anwenden einer reinen Lorentz-Transformation in Richtung der z -Achse.) Deshalb sind die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Zustandes (vgl. (B-28)) in beiden Bezugssystemen dieselben. Nach (B-29) stimmen daher auch die Dichtematrizen überein. Sie beziehen sich allerdings auf verschiedene lokale Koordinatensysteme, da die Impulsrichtung sich bei Anwenden der Lorentz-Transformation verändert.

6.1.4. Ableitung eines Näherungsausdruckes für die Compton-Streuung an schräg einfallenden Laser-Photonen

Mit Hilfe der Bemerkungen aus den beiden vorangegangenen Abschnitten zum Transformationsverhalten der kinematischen Größen und der Polarisationsparameter beim Übergang vom Laborsystem zum Ruhssystem erhält man die folgende

Behauptung :

Der Wirkungsquerschnitt für die Bildung hochenergetischer γ -Quanten bei der Compton-Streuung von polarisierten hochenergetischen Elektronen (Energie $E_{1,L}$) an *schräg einfallenden* polarisierten Laserphotonen geringer Energie $E_{2,L} \ll E_{1,L}$ stimmt in guter Näherung überein mit dem Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung derselben Elektronen an *kollinear einfallenden* Photonen, deren Energie und deren Polarisationsparameter geeignet gewählt sind und die im folgenden als *äquivalente kollinear kollidierende Photonen* bezeichnet werden:

- 1) Die Energie $\tilde{E}_{2,L}$ dieser äquivalenten Photonen ist

$$\tilde{E}_{2,L} = E_{2,L} (1 - \cos \Theta_{2,L}) / 2. \quad (6-12)$$

$\Theta_{2,L}$ bezeichnet den Winkel, den der Impulsvektor der schräg einfallenden (realen) Photonen mit der z-Achse bildet (vgl. Abb. 2-6, kollinearer Einfall entspricht $\Theta_{2,L} = \pi$). Es wird vorausgesetzt, daß $\Theta_{2,L}$ die Bedingung

$$\pi \geq \Theta_{2,L} \gg \gamma_{1,L} = m_1 / E_{1,L} \quad (6-13)$$

erfüllt.

- 2) Die Polarisationsparameter $\tilde{s}_{\parallel}^{(2)}$, $\tilde{s}_{\perp}^{(2)}$ und $\tilde{\varphi}^{(2)}$ der äquivalenten kollinear kollidierenden Photonen (vgl. die Darstellung (2-68) der Dichtematrix eines Photons) im lokalen Koordinatensystem zum Impuls

$$\tilde{\mathbf{p}}_{2,L} = (0, 0, -|\tilde{\mathbf{p}}_{2,L}|) \equiv \{|\tilde{\mathbf{p}}_{2,L}|, \pi, \pi\}$$

erhält man aus den Polarisationsparametern $s_{\parallel}^{(2)}$, $s_{\perp}^{(2)}$ und $\psi^{(2)}$ der schief einfallenden Laserphotonen gemäß

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{\parallel}^{(2)} &= s_{\parallel}^{(2)}, \\
\tilde{s}_{\perp}^{(2)} &= s_{\perp}^{(2)}, \\
\tilde{\psi}^{(2)} &= 2\tilde{\alpha}^{(2)} = 2(\alpha^{(2)} - 2\Phi_2) = \psi^{(2)} - 4\Phi_2.
\end{aligned}
\tag{6-14}$$

Beweis :

Zum Beweis wird der Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt ins Ruhesystem des Elektrons transformiert, dort gedreht, so daß die Impulsrichtung des Photons in die negative z-Richtung zeigt, und anschließend genähert.

Im Ruhesystem des Elektrons wird die Impulsrichtung des ungestreuten Photons mit $\hat{\mathbf{p}}_{2,R}$, die des gestreuten Photons mit $\hat{\mathbf{p}}_{3,R}$ bezeichnet:

$$\hat{\mathbf{p}}_{2,R} \equiv \mathbf{p}_{2,R} / |\mathbf{p}_{2,R}| \equiv \{\Theta_{2,R}, \Phi_{2,R}\},$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{3,R} \equiv \mathbf{p}_{3,R} / |\mathbf{p}_{3,R}| \equiv \{\Theta_{3,R}, \Phi_{3,R}\}.$$

Nach Gl. (6-11) bildet der Impuls eines im Laborsystem schräg einfallenden Laserphotons, dessen Einfallswinkel $\Theta_{2,L}$ der Bedingung (6-13) genügt, im Ruhesystem des Elektrons einen sehr kleinen Winkel $\Delta\Theta_{2,R}$ (Größenordnung $1/\gamma_{1,L}$) mit der negativen z-Achse, sodaß man die Impulsrichtung des ungestreuten Photons zweckmäßigerweise in der Form

$$\{\Theta_{2,R}, \Phi_{2,R}\} = \{\pi - \Delta\Theta_{2,R}, \Phi_{2,R}\}$$

angibt. Die Energie des Teilchens kann mit Hilfe von (6-8) und (6-7b) durch Laborsystemgrößen ausgedrückt werden.

$$E_{2,R} = \frac{\gamma m_1}{2} = E_{1,L} \frac{2 E_{2,L}}{m_1} \frac{1 - \cos\Theta_{2,L}}{2}. \tag{6-15}$$

Die Polarisationsparameter von Elektron und Photon ändern sich - wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben - beim Übergang vom Laborsystem zum Ruhssystem nicht. (Deshalb kann man darauf verzichten, an den Parametern $s_{||}^{(1)}$ etc. Indizes "L" oder "R" anzubringen.)

Infolge der Rotationsinvarianz des Wirkungsquerschnittes kann man den Wirkungsquerschnitt für die Emission eines Photons in die Richtung $\hat{\mathbf{p}}_{3,R}$ dadurch bestimmen, daß man den gesamten Streuvorgang einer Drehung $R_n(\Delta\Theta_{2,R})$ unterwirft. Die Drehachse ist

$$\mathbf{n} = (-\sin\Phi_{2,R}, \cos\Phi_{2,R}, 0), \quad (6-16)$$

der Drehwinkel $\Delta\Theta_{2,R}$. Als Resultat der Rotation (gedrehte Größen werden durch einen Strich gekennzeichnet) fliegt das ungestreute Photon mit der Energie $E'_{2,R} = E_{2,R}$ exakt in Richtung der negativen z-Achse. Zu bestimmen ist jetzt der Wirkungsquerschnitt für die Bildung eines Photons, dessen Impuls in die Richtung

$$\hat{\mathbf{p}}'_{3,R} = R_n(\Delta\Theta_{2,R}) \hat{\mathbf{p}}_{3,R} \equiv \{\Theta'_{3,R}, \Phi'_{3,R}\} \quad (6-17)$$

zeigt.

Durch die Drehung $R_n(\Delta\Theta_{2,R})$ ändern sich die Polarisationsparameter von Elektron und Photon:

- Elektron:

Den neuen Polarisationsvektor $\mathbf{S}^{(1)'}$ erhält man durch Drehung des ursprünglichen Polarisationsvektors.

$$\mathbf{S}^{(1)'} = R_n(\Delta\Theta_{2,R}) \mathbf{S}^{(1)}. \quad (6-18)$$

- Photon:

Der Polarisationsgrad für die zirkulare und lineare Polarisation bleibt bei der Drehung erhalten.

$$\begin{aligned} s_{\parallel}^{(2)'} &= s_{\parallel}^{(2)}, \\ s_{\perp}^{(2)'} &= s_{\perp}^{(2)}. \end{aligned} \quad (6-19)$$

Der Polarisationsparameter $\alpha^{(2)}$ (oder $\psi^{(2)}$) hingegen, der nach (2-68) und Abb. 2 - 4 die Richtung der linearen Polarisation festlegt, ändert sich. Das ist auf die Unstetigkeit der lokalen Koordinatensysteme (LKS) an der Stelle $\mathbf{p} = (0, 0, -|\mathbf{p}|)$ zurückzuführen. Das LKS "2'", in dem die Polarisation des gedrehten Photons beschrieben werden muß, ist der Impulsrichtung $\mathbf{p} = (0, 0, -|\mathbf{p}|) = \{\pi, \pi\}$ zuzuordnen ([23], vgl. (2-8)) und entsteht aus den Koordinatenachsen xyz des Ruhsystems durch Drehung um die Achse $(0, -1, 0)$ um den Winkel π . Dreht man dagegen mittels $R_{\mathbf{n}}(\Delta\theta_{2,R})$ das LKS "2" stetig in die Impulsrichtung $(0, 0, -|\mathbf{p}|)$, so erhält man ein LKS "lim 2", das der Impulsrichtung $\{\pi, \Phi_{2,R}\}$ entspricht (d.h. es entsteht durch Drehung von xyz um den Vektor $\mathbf{n}$ aus (6-16) mit Drehwinkel π). Seine Orientierung hängt von $\Phi_{2,R}$ ab (vgl. die Abb. 2 - 1 und 6 - 1). Aus Abb. 6 - 1 geht hervor, daß "lim 2" gegenüber dem LKS "2'" um einen Winkel $2(\pi - \Phi_{2,R})$ um die z-Achse gedreht ist. Bei dem stetigen Übergang von "2" nach "lim 2" ändern sich die Polarisationsparameter nicht. Wenn daher $\alpha^{(2)}$ die Richtung der linearen Polarisation im LKS "2" (und damit im Koordinatensystem "lim 2") angibt, dann beschreibt der Winkel

$$\alpha^{(2)'} = \alpha^{(2)} + 2(\pi - \Phi_{2,R}) \quad (6-20)$$

diese Richtung im LKS "2'" (vgl. Abb. 6 - 1).

(Die beiden Gleichungen (6-19) und (6-20) kann man auf formellere Weise aus den Anhängen A und B gewinnen: Die Wigner-Rotation R_W für die Drehung

$$R_{\mathbf{n}}(\Delta\theta_{2,R}) : \hat{\mathbf{p}}_{2,R} = \{\theta_{2,R}, \Phi_{2,R}\} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_{2,R}' = \{\pi, \pi\}$$

ist nach (A-20)

$$\begin{aligned} R_W &= R_y(\pi) R_{\mathbf{n}}(\Delta\theta_{2,R}) R_{\mathbf{n}}(\theta_{2,R}) \\ &= R_y(\pi) R_{\mathbf{n}}(\pi). \end{aligned}$$

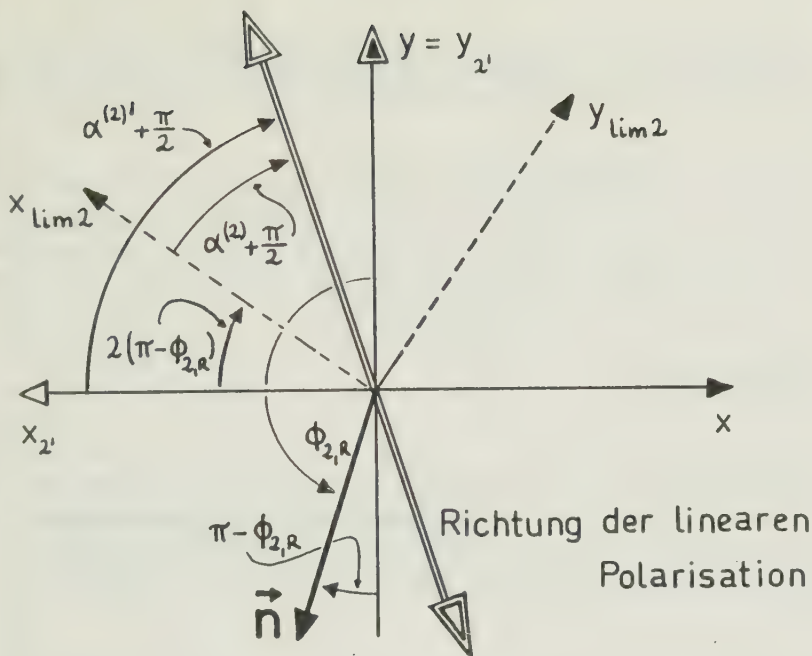


Abb. 6 - 1 : Die Orientierung der Koordinatensysteme "2'" und "lim 2". Das Achsensystem "lim 2" kann als LKS für die Impulsrichtung $\lim \{\pi - \Delta\Theta_2, \Phi_{2,R}\} \equiv \{\pi, \Phi_{2,R}\}$ aufgefaßt werden. Es entsteht aus dem Koordinatensystem xyz des ruhenden Teilchens durch Drehung um die Achse $\vec{n}$ aus (6-16) mit Drehwinkel π (vgl. Abb. 2 - 1). Gegenüber dem LKS "2'" ist "lim 2" um den Winkel $2(\pi - \Phi_{2,R})$ gedreht. Der Doppelpfeil kennzeichnet die Richtung der linearen Polarisation des Photons.

Einsetzen der expliziten Ausdrücke (A-17) für die Drehmatrizen ergibt

$$R_W = R_z(\Phi_W), \quad \text{mit } \Phi_W = 2(\pi - \Phi_{2,R}).$$

Nach (A-51) erhalten die Entwicklungskoeffizienten α_λ (vgl. (B-28)) eines beliebig polarisierten Zustandes nach Helizitätsamplituden bei Anwendung von $R_a(\Delta\Theta_{2,R})$ einen Phasenfaktor $\exp(-i\lambda\Phi_W)$. Für das Ma-

trixelement ρ'_{+-} der transformierten Dichtematrix (vgl. (B-29) und (B-35) oder (2-68) und (2-69)) gilt deshalb

$$\begin{aligned}\rho'_{+-} &= s_{\perp}^{(2)'} \exp(-i2\alpha^{(2)'}) \\ &= \alpha'_+ \alpha'_- \\ &= \alpha_+ \alpha_- \exp(-i2\Phi_W) \\ &= s_{\perp}^{(2)} \exp(-i2(\alpha^{(2)} + \Phi_W)).\end{aligned}$$

Daraus folgt (6-20).)

Den Wirkungsquerschnitt für den gedrehten Streuprozess kann man aus (6-2) und (6-3) entnehmen, da das Photon jetzt in Richtung der negativen z-Achse fliegt. Dabei sind alle Winkel und Polarisationsparameter durch die gestrichenen Größen aus den Gln. (6-17) bis (6-20) zu ersetzen.

Bis zu dieser Stelle ist keine Näherung verwendet. Da für Einschußenergien von $E_{1,L} = 1 \dots 10^3$ GeV und $E_{2,L} = O(\text{eV})$ der Drehwinkel $\Delta\theta_{2,R} = O(1/\gamma_{1,L})$ sehr klein ist, kann man, wie im folgenden gezeigt wird, unter bestimmten Bedingungen gestrichene Größe durch ungestrichene approximieren.

Der genäherte Ausdruck soll die Erzeugung von (im Laborsystem) harten, rückgestreuten γ -Quanten beschreiben. In dem Fall ist eine gute Näherung für den Wirkungsquerschnitt im Ruhssystem der Elektronen nach Rücktransformation auf das Laborsystem auch eine gute Näherung für das Energiespektrum harter Photonen. Das kann man folgendermaßen begründen: Den rückgestreuten γ -Quanten entsprechen im Ruhssystem Photonen, die in den Polarwinkelbereich $0 \leq \theta_{3,R} < \pi - \Delta\theta$ mit $\Delta\theta \gg 1/\gamma_{1,L}$ gestreut werden (vgl. (6-10a) und (6-7a); zu beachten ist, daß harte Photonen nur für $0 \leq \gamma \ll \gamma_{1,L}$ entstehen). In diesem Winkelbereich ist der Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel $\theta_{3,R}$ im Ruhssystem und dem reduzierten Streuwinkel γ im Laborsystem nach (6-10b) frei von Singularitäten. Wegen (6-7a) gilt dasselbe zwischen $\theta_{3,R}$ und $E_{3,L}$. Eine kleine Abänderung des Wirkungsquerschnittes im

Ruhsystem kann daher weder auf die Winkelverteilung noch auf das Energiespektrum der harten Photonen im Laborsystem eine große Auswirkung haben.

Im Ruhsystem zeigen der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt (6-3a) und die Asymmetriekoeffizienten (6-3b) bis (6-3d) nur eine schwache Abhängigkeit von $\Theta_{3,R}$. Die Funktionen sind strukturlos in Winkelbereichen der Größenordnung $\Delta\Theta_{2,R} = O(1/\gamma_{1,L})$. Deshalb kann man die Näherung

$$\Theta_{3,R}' \approx \Theta_{3,R} \quad (6-21)$$

vornehmen.

Unproblematisch sind auch die Ersetzungen

$$s_{\parallel}^{(1)'} \approx s_{\parallel}^{(1)} \quad (6-22a)$$

und

$$s_{\perp}^{(1)'} \approx s_{\perp}^{(1)}, \quad (6-22b)$$

da die Änderungen der longitudinalen und transversalen Komponente des Spinvektors des Elektrons höchstens von der Ordnung $O(1/\gamma_{1,L})$ sein können.

Etwas eingehender muß man die Ausdrücke

$$s_{\perp}^{(1)'} \cos(\Phi_{3,R}' - \psi^{(1)'}) \approx s_{\perp}^{(1)} \cos(\Phi_{3,R}' - \psi^{(1)'})$$

und

$$s_{\perp}^{(2)'} \cos(\Phi_{3,R}' + 2\alpha^{(2)'}) \approx s_{\perp}^{(2)} \cos(\Phi_{3,R}' + 2\alpha^{(2)} + 4(\pi - \Phi_{2,R}))$$

behandeln, wobei für $\alpha^{(2)'}$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Beziehung (6-20) eingesetzt ist. Wenn $\mathbf{p}_{3,R}$ einen Winkel der Ordnung $1/\gamma_{1,L}$ mit der positiven oder negativen z-Achse bildet, dann kann trotz

der Kleinheit von $\Delta\Theta_{2,R}$ der Azimutwinkel $\Phi'_{3,R}$ des gedrehten Richtungsvektors $\mathbf{p}'_{3,R}$ aus (6-17) sich sehr deutlich von $\Phi_{3,R}$ unterscheiden. Es gilt

$$\Phi'_{3,R} \approx \Phi_{3,R} \text{ nur für } 1/\gamma_{1,L} \lesssim \Theta_{3,R} \lesssim \pi - 1/\gamma_{1,L}. \quad (6-23)$$

Dennoch kann man $\Phi'_{3,R}$ durch $\Phi_{3,R}$ ersetzen: Erstens ist der Bereich $\pi - 1/\gamma_{1,L} \lesssim \Theta_{3,R} \lesssim \pi$ bereits ausgeschlossen, da die zugehörigen Photonen im Laborsystem weich sind; zweitens hat die Verzerrung der Azimutwinkelverteilung infolge der Ersetzung $\Phi'_{3,R} \rightarrow \Phi_{3,R}$ für $\Theta_{3,R} \lesssim 1/\gamma_{1,L}$ keine praktischen Konsequenzen, solange man den zugehörigen Streuwinkel $\Theta_{3,L} = O(1/\gamma_{1,L}^2) (\lesssim 10^{-8} \text{ rad für } E_{1,L} \gtrsim 5 \text{ GeV})$ nicht messen kann.

Die Gln. (6-21) bis (6-23) zusammenfassend kann man für den Wirkungsquerschnitt im Ruhssystem unter Verwendung von (6-20) schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{3,R}} &= \frac{d\sigma_0}{d\Omega_{3,R}} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\Theta_{3,R}) \right. \\ &\quad + s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_{3,R} - \psi^{(1)}) A_{TL}(\Theta_{3,R}) \\ &\quad \left. + s_{\perp}^{(2)} \cos(2\Phi_{3,R} + 2(\alpha^{(2)} - 2\Phi_{2,R})) A_{OT}(\Theta_{3,R}) \right\}. \end{aligned} \quad (6-24)$$

Ausdrücke für $d\sigma_0/d\Omega_{3,R}$, A_{LL} , A_{TL} und A_{OT} sind (6-3a) bis (6-3e) zu entnehmen, mit $E_{2,R}$ aus (6-15). Gl. (6-24) stellt eine gute Näherung dar für $1/\gamma_{1,L} \ll \Theta_{3,R} \lesssim \pi - \Delta\Theta$ mit $\Delta\Theta \gg 1/\gamma_{1,L}$. Für $\Theta_{3,R} \lesssim 1/\gamma_{1,L}$ liefert sie zwar eine falsche Azimutwinkelverteilungen, beschreibt aber auch hier den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt und die Polarisationsasymmetrie A_{LL} annähernd richtig.

Gl. (6-24) ist nun gerade der Wirkungsquerschnitt, den man im Ruhssystem des Elektrons für die Streuung eines äquivalenten kollinear kollidierenden Photons erhält, das sich im Laborsystem mit der Energie $\tilde{E}_{2,L}$ aus (6-12) in Richtung der negativen z-Achse bewegt und dessen Polarisationsparameter durch (6-14) gegeben sind (vgl. (6-2)). Damit ist die Behauptung vom Beginn dieses Abschnittes bewiesen.

6.2. Winkelverteilung und Energiespektrum der rückgestreuten Photonen im Laborsystem

In diesem Abschnitt wird der Wirkungsquerschnitt (6-24) für die Erzeugung harter γ -Quanten mittels Compton-Streuung durch Laborsystemgrößen ausgedrückt. Im Hinblick auf die Polarisationsmessung an Elektronen ist die lineare Polarisation $s_{\perp}^{(2)}$ der Photonen unwichtig, da in der niedrigsten Ordnung der QED nur zirkular polarisierte Photonen auf den Polarisationszustand von Elektronen reagieren. Das folgt aus (B-56) unter Verwendung von (B-50) und (B-57). Der Einfachheit halber wird $s_{\perp}^{(2)} = 0$ vorausgesetzt.

Nach (6-7a) werden die harten rückgestreuten γ -Quanten in einen schmalen Kegel mit Öffnungswinkel $\Theta_{3,L} = O(1/\gamma_{1,L})$ emittiert, wobei die Flugrichtung der einlaufenden Elektronen die Achse des Kegels bildet. Der Emissionswinkel $\Theta_{3,L}$ wird durch den reduzierten Winkel y aus (6-5) ausgedrückt.

Gl. (6-10b) verknüpft den reduzierten Streuwinkel y mit dem Emissionswinkel $\Theta_{3,R}$ im Ruhssystem. Zusammen mit (6-8) kann man die Energie $E_{3,R}$ der gestreuten Photonen im Ruhssystem (siehe Gl. (6-3e)) durch die Größe y ausdrücken.

$$E_{3,R} \approx E_{2,R} \frac{1 + y^2}{1 + y^2 + X} \quad (6-25)$$

Damit lassen sich der Wirkungsquerschnitt (6-24) und die Asymmetriekoeffizienten umschreiben (es ist $\Phi_{3,R} = \Phi_{3,L} \equiv \Phi_3$):

$$\frac{d\sigma}{dy d\Phi_3} = \frac{d\sigma_0}{dy d\Phi_3} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(y, X) + s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) A_{TL}(y, X) \right\} \quad (6-26a)$$

mit

$$\frac{d\sigma_0}{dy d\phi_3} = \frac{r_e^2}{2} \frac{4y}{(1+y^2+X)^2} \times I, \quad (6-26b)$$

$$I \equiv \frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2} + \frac{X}{1+y^2} + \frac{1+y^2}{1+y^2+X},$$

$$A_{LL}(y,X) = -\frac{(1-y^2)}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{2(1+y^2)+X}{1+y^2+X} \cdot \frac{X}{I}, \quad (6-26c)$$

$$A_{TL}(y,X) = -\frac{2y}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+y^2+X} \cdot \frac{X}{I}. \quad (6-26d)$$

Die Gln. (6-26) gelten für $y/y_{1,L} \ll 1$. Der kinematische Parameter X aus (6-7b) enthält die Energie $E_{2,L}$ und den Einfallswinkel $\Theta_{2,L}$ der Laserphotonen. Diese beiden Bestimmungsstücke sind in der Energiegröße $\tilde{E}_{2,L}$ zusammengefaßt:

$$X = \frac{4E_{1,L}}{m_1^2} \frac{E_{2,L}(1 - \cos\Theta_{2,L})}{2} = \frac{4E_{1,L}}{m_1^2} \tilde{E}_{2,L}. \quad (6-27)$$

$\tilde{E}_{2,L}$ ist die Energie des äquivalenten kollinear kollidierenden Photons aus Abschnitt 6.1.4 (vgl. (6-12)).

Der über $\phi_{3,L}$ integrierte Wirkungsquerschnitt (6-26a) ist den Abbildungen 6-2a bis 6-2d für die Parameterwerte $X=0.5, 1, 2$ und 5 zu entnehmen. Die Polarisationsabhängigkeit wird durch den Parameter $S \equiv s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)}$ beschrieben. Aufgetragen sind der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt ($S=0$) und die beiden Grenzfälle $S=+1$ und $S=-1$. Der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt $d\sigma_0/dy$ durchläuft ein Maximum im Bereich $0 < y < 1$ und fällt für $y > 1$ rasch ab. Die Kurven

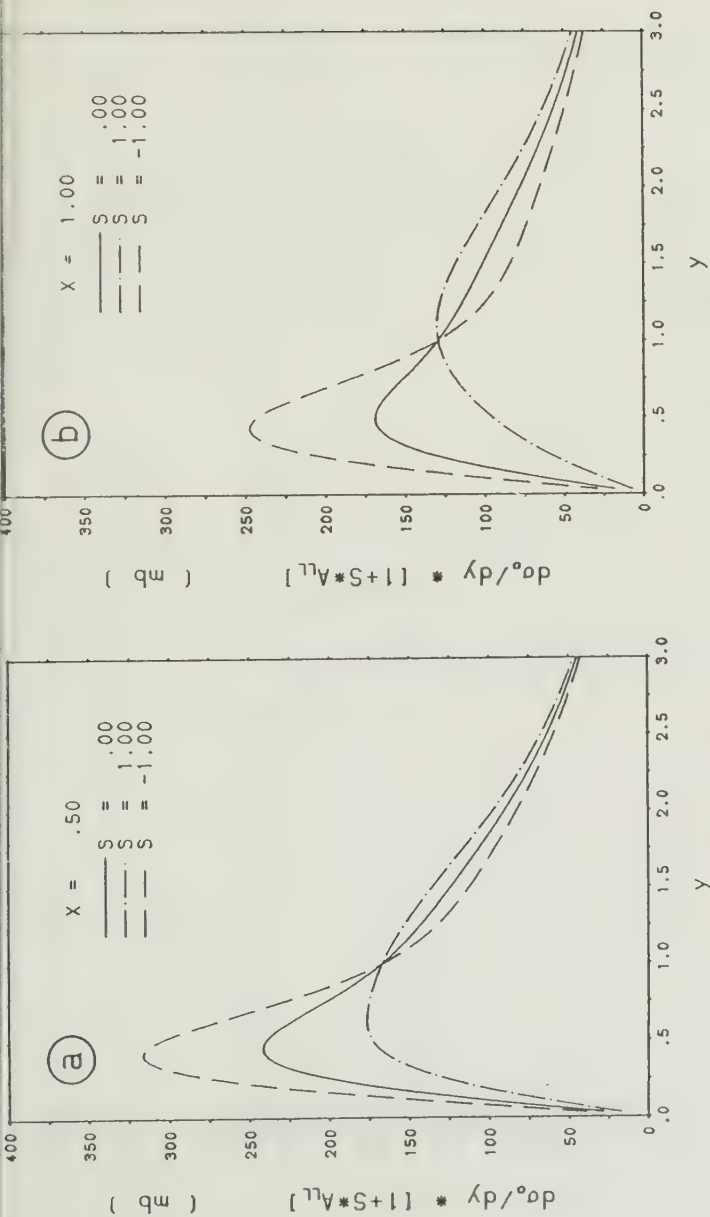
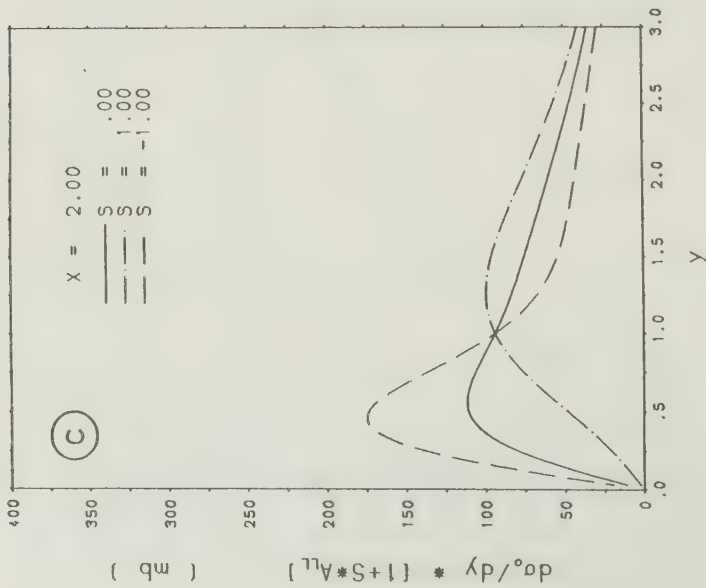
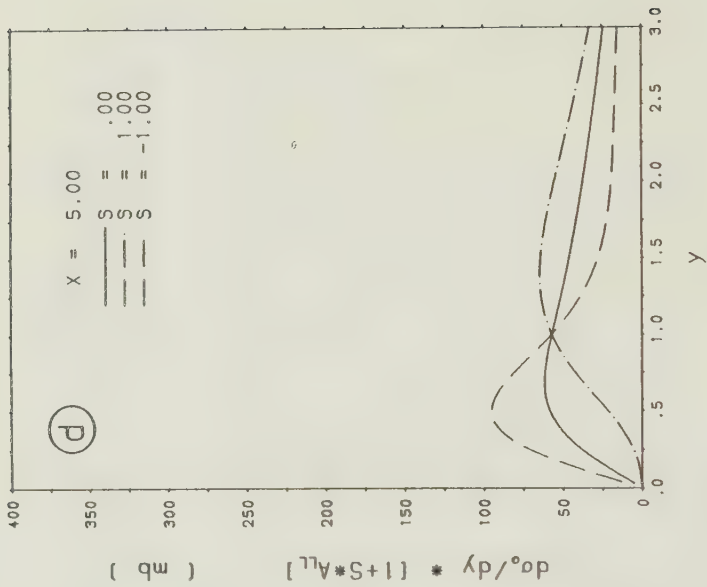


Abb. 6-2 a-d : Winkelverteilung $d\sigma/dy = d\sigma_0/dy \cdot \{1 + S A_{LL}(y, X)\}$ der rückgestreuten Laserphotonen für einige Werte des Parameters X in Abhängigkeit vom Polarisationsparameter $S \equiv s_{||}^{(1)} s_{||}^{(2)}$. Es ist X (s. (6-27)) die doppelte Energie der Laserphotonen im Ruhesystem des Elektrons in Einheiten der Elektronenmasse, y der Streuwinkel $\Theta_{3,1}$ in Einheiten von $1/\gamma_{1,1}$.



für unterschiedlich polarisierte Teilchen schneiden sich bei $\gamma = 1$, denn an dieser Stelle wechselt der Asymmetriekoeffizient A_{LL} das Vorzeichen. (Der Streuwinkel im Ruhssystem ist dort $\Theta_{3,R} = \pi/2$.) Für Polarisationsmessungen ist der Bereich $0 < \gamma < 1$ am interessantesten.

Wegen der kleinen Emissionswinkel $\Theta_{3,L} = \gamma / \gamma_{1,L}$, $\gamma = O(1)$, ist die experimentelle Bestimmung der Winkelverteilung schwer durchführbar. Nach (6-7a) reagiert jedoch die Energie $E_{3,L}$ der rückgestreuten γ -Quanten bei den hier betrachteten Energien ($X = O(1)$) sehr empfindlich auf Streuwinkeländerungen im Bereich $0 < \gamma < 1$: Die maximale Energie $E_{3,L;\max}$ erhalten Photonen, die um genau 180° gestreut werden, d.h. für die $\Theta_{3,L} = \gamma = 0$ gilt.

$$E_{3,L;\max} = E_{1,L} \frac{X}{1 + X} . \quad (6-28)$$

Mit zunehmendem reduziertem Streuwinkel γ fällt $E_{3,L}$ sehr rasch ab (vgl. (6-7a)). Diese Energieänderungen sind meßbar. Im Energiespektrum der rückgestreuten γ -Quanten wird der Streuwinkelbereich $0 < \gamma < 1$ experimentell zugänglich. (Eine Azimutwinkelverteilung spiegelt sich in der Energieverteilung allerdings nicht wider.) Mit Hilfe der dimensionslosen Energievariablen

$$\rho \equiv \frac{E_{3,L}}{E_{3,L;\max}} = \frac{1 + X}{1 + \gamma^2 + X} \quad (6-29)$$

und der Größe z

$$z \equiv \frac{1}{1 + X} \quad (6-30)$$

erhält man aus (6-26a) das Energiespektrum in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\rho d\Phi_3} = \frac{d\sigma_0}{d\rho d\Phi_3} \left\{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\rho, X) + s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) A_{TL}(\rho, X) \right\} . \quad (6-31a)$$

Dabei ist

$$\frac{d\sigma_0}{d\rho d\Phi_3} = r_e^2 z \cdot I' \quad (6-31b)$$

$$\text{mit} \quad I' \equiv 1 + \frac{\rho^2 (1-z)^2}{1 - \rho(1-z)} + \frac{[1 - \rho(1+z)]^2}{[1 - \rho(1-z)]^2} ,$$

$$A_{LL}(\rho, X) = \frac{\rho (1-z) [2 - \rho(3+z) + \rho^2(1-z^2)]}{2 - 4\rho - \rho^2 (3 - 2z + 3z^2) - \rho^3 (1-z)^3} , \quad (6-31c)$$

$$A_{TL}(\rho, X) = - \frac{\rho (1-z)}{1 - \rho(1-z)} \frac{\sqrt{4 z \rho (1-\rho)}}{I'} . \quad (6-31d)$$

Das über Φ_3 integrierte Energiespektrum (6-31a) ist in den Abbildungen 6-3a bis 6-3d für $X=0.5, 1, 2$ und 5 aufgetragen. Wie in den Abbildungen 6-2 wird der Polarisationsparameter $S \equiv s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)}$ verwendet. Das Energiespektrum $d\sigma_0/d\rho$ für die Streuung unpolarisierter Teilchen entspricht der Kurve $S=0$. Für $\rho \rightarrow 1$ steigt $d\sigma_0/d\rho$ stark an. (Der Anstieg wird mit zunehmender Energie der einlaufenden Teilchen immer ausgeprägter. Es existieren Vorschläge, auf diese Weise quasimonochromatische Gamma-Strahlen zu erzeugen [63,64].) Zur Veranschaulichung der Polarisationsabhängigkeit sind die Grenzkurven $S = +1$ und $S = -1$ eingezeichnet. Man stellt eine deutliche Polarisationsabhängigkeit am hochenergetischen Ende des Spektrums ($\rho \rightarrow 1$) fest. Dieser Bereich entspricht einer Streuung in das Winkelintervall $0 \leq \Theta_{3,L} \leq 1/\gamma_{1,L}$. Der Vorzeichenwechsel der Polarisationsasymmetrie findet an der Stelle statt, an der die Energie ρ dem Streuwinkel $y=1$ (vgl. Abb. 6-2) entspricht.

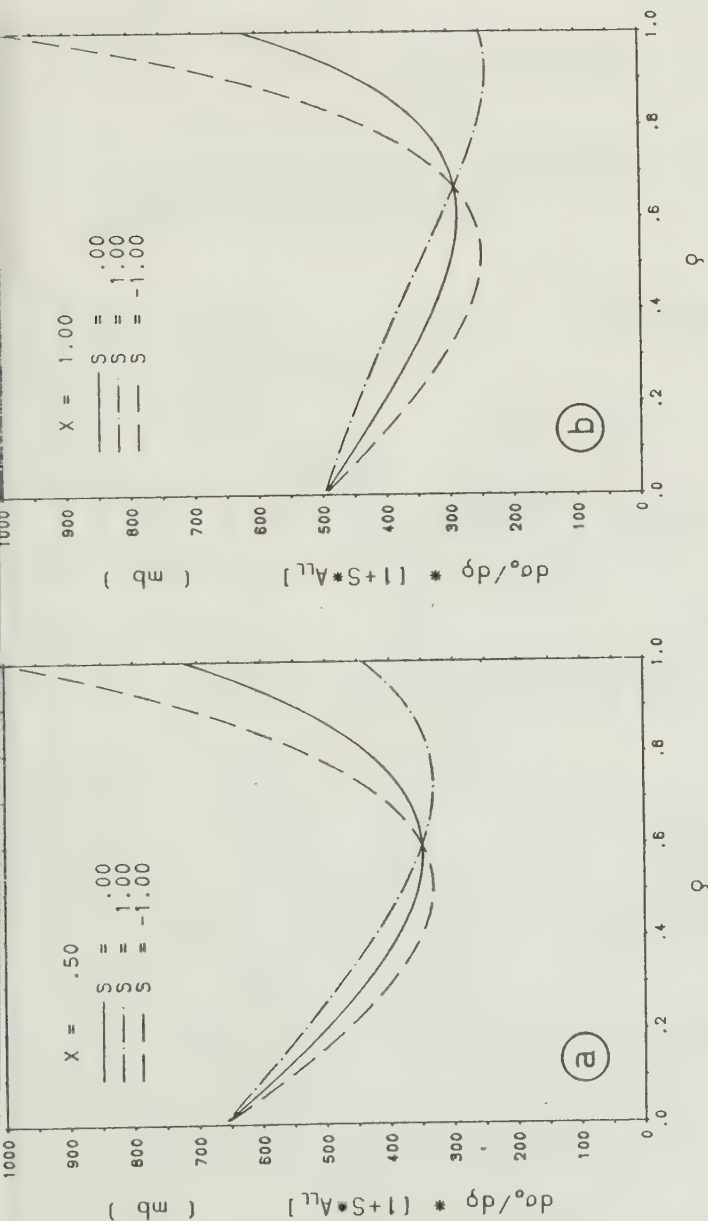
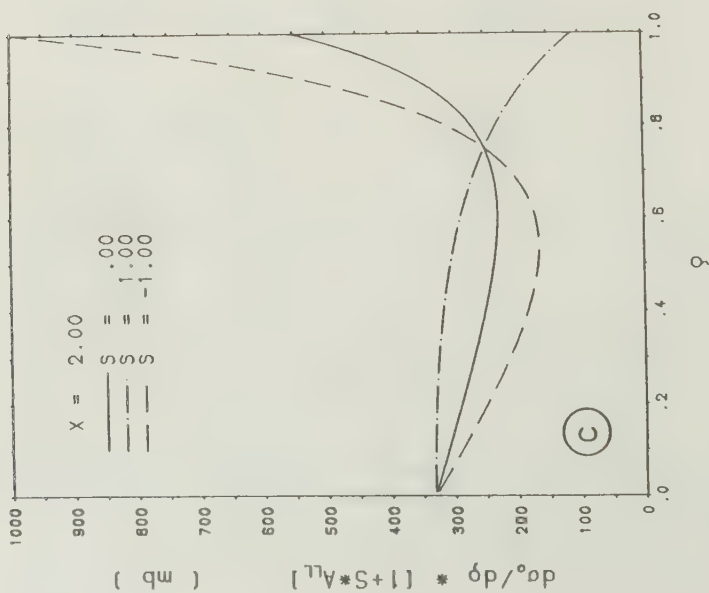
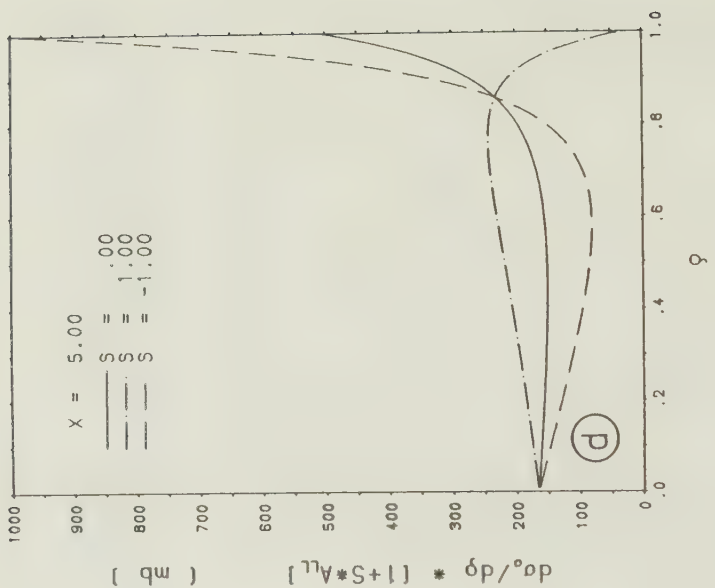


Abb. 6-3 a-d : Energiespektrum $d\sigma/dp = d\sigma_0/dp \{1 + S A_{LL}(\rho, X)\}$ der rückgestreuten Laserphotonen für einige Werte des Parameters X in Abhängigkeit vom Polarisationsparameter $S \equiv s_{||}^{(1)} s_{||}^{(2)}$. ρ ist nach (6-29) die Energie der rückgestreuten γ -Quanten in Einheiten der maximalen Photonenenergie $E_{3,L,max}$.



6.3. Vorschlag für eine experimentelle Anordnung zur Messung der longitudinalen Polarisation von Elektronen im Endzustand mit Hilfe eines Hochleistungslasers

Der über den Azimutwinkel Φ_3 integrierte Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung hochenergetischer γ -Quanten durch Compton-Streuung an zirkular polarisierten Laserphotonen ist von der longitudinalen Polarisation der einfallenden Elektronen (Positronen) abhängig (vgl. Abschnitt 6.2). Aus der Messung des Energiespektrums der rückgestreuten γ -Quanten läßt sich der Grad der longitudinalen Polarisation bestimmen (vgl. (6-31a)). Darauf beruht die Polarimeter-Anordnung, die in diesem Abschnitt vorgeschlagen und auf ihre Effektivität untersucht wird.

Die Messung transversaler Polarisation wird hier nicht behandelt, denn sie kann nur anhand der Azimutwinkelverteilung der rückgestreuten γ -Quanten durchgeführt werden (vgl. (6-31a)). Da die Emissionswinkel nach Abschnitt 6.2 für hochenergetische Elektronen sehr klein sind ($\Theta_{3,L} = O(1/\gamma_{1,L})$), müßte man die Impulsrichtung des Elektrons vor und die Flugrichtung des Photons nach dem Compton-Streuprozess mit einer Genauigkeit bestimmen, die in heutigen Hochnergiedetektoren nicht erreichbar ist. Zur Illustration dessen einige Daten aus der Polarisationsmessung an Strahlteilchen des e^+e^- -Speicherringes PETRA [61]. Hier gelingt es zwar die Azimutwinkelverteilung der gestreuten Photonen zu ermitteln. Verglichen mit der Situation bei der Messung der Endzustandspolarisation, ist die Ausgangsposition jedoch wesentlich günstiger: Während man den Impuls eines gestreuten Teilchens erst bestimmen muß, legt man bei der Polarisationsanalyse von Strahlteilchen die Wechselwirkungszone an eine der Stellen im Speicherring, an denen der Impuls der beschleunigten Teilchen ausreichend genau bekannt ist. Außerdem kann der Detektor zur Registrierung der γ -Quanten in großem Abstand von der Wechselwirkungszone aufgebaut werden.

Z.B. beträgt bei PETRA bei einer Strahlenergie von 15.2 GeV die Entfernung zwischen Wechselwirkungszone und Detektor ca. 45 m [61]. Nur so ist es möglich, die Winkelverteilung der harten Photonen in einem Kegel mit einem Öffnungswinkel von $\approx 30 \mu\text{rad}$ experimentell zu bestimmen. Allein wegen dieser Ausmaße scheint eine vergleichbare Anordnung ungeeignet für die Messung der transversalen Polarisierung von Elektronen im Endzustand zu sein.

6.3.1. Beschreibung der Anordnung

Als Meßvorrichtung ist eine Anordnung denkbar, bei der man neben der Wechselwirkungszone des Primärprozesses (vgl. Abb. 2 – 5) ein Photonenbündel "plaziert". Sekundärelektronen, also Elektronen, die in dem Primärprozess erzeugt oder gestreut werden und deren Polarisierung bestimmt werden soll, durchqueren das Photonentarget. Ein Teil von ihnen wird Compton-gestreut. Ein Detektor mißt die Energien der dabei entstehenden Streuteilchen (= Tertiärteilchen). Aus dem Energiespektrum ermittelt man die longitudinale Polarisierung der Elektronen.

Um ausreichend dichte Photonentargets zu erzeugen, werden Hochleistungslaser ("high-power laser") benötigt. In Tab. 6 – 1 sind einige Anlagen mit den von ihnen erbrachten Leistungen aufgeführt. Hochleistungslaser erzeugen Lichtpulse, deren Dauer im Bereich $t = 0.1 \text{ ns}$ bis $t = \text{einige ns}$ liegt. Der maximale Energieinhalt W eines Photonenbündels beträgt $\approx 10 \dots 100 \text{ kJ}$. Die Spitzenleistung L ist von der Größenordnung $10 \dots 100 \text{ TW}$. Die hohe Gesamtleistung wird durch Bündelung der Strahlen mehrerer Laser mit einer Leistung von jeweils einigen TW erreicht. Die meisten derzeit zur Verfügung stehenden Hochleistungslaser sind Nd-Glas-Laser, die Licht der Wellenlänge $\lambda = 1064 \text{ nm}$ emittieren. Durch Frequenzvervielfachung gelingt es, mehr als 50 % der in einem Puls enthaltenen Energie in Licht der doppelten ($\lambda = 532 \text{ nm}$) bzw. dreifachen ($\lambda = 355 \text{ nm}$) Frequenz zu verwandeln [65,66,67].

Name (Ort)	Typ	Strahlen	λ (nm)	t_W (ns)	W (kJ)	t_L (ns)	L (TW)	Quelle
ANTARES (Los Alamos)	CO ₂	24	10600.		30.	1.-10.	30.	[73]
ASTERIX III (Garching)	Jod	1	1315.		0.3	0.18-0.36	$\geq 1.$	[69]
GEKKO XII (Osaka)	Nd-Glas	12	1064. 532.	0.5	30. 20.	0.1 0.1	50. 35.	[74]
OMEGA (Rochester)	Nd-Glas	24	1064. 355.	1. 0.65	4. 2.4	0.05	12.2	[70]
NOVA (Livermore)	Nd-Glas	10	1064. 532. 355.	2.-3. 2.-3. 2.-3.	80.-120. 50.-80. 50.-80.	0.1 0.1 0.1	100. 75. 75.	[75]
AURORA (Los Alamos)	KrF	96	248.	5.	15.			[73]

Tab. 6 - 1 : Name, Standort und charakteristische Daten einiger Hochleistungslaser. Die maximale Energie W pro Puls wird in der Zeit t_W abgegeben. Die Spitzenleistung L läßt sich über den Zeitraum t_L aufrechterhalten.

Mit den in Tab. 6-1 beschriebenen Anlagen soll eine Kernfusion mittels Trägheitseinschluß erreicht werden. Dazu ist eine Wellenlänge von $\lambda \leq 500$ nm, eine Pulsenergie von $\approx 1-3$ MJ und Pulsdauer von ≈ 5 ns erforderlich [68]. Die Leistungen des NOVA-Lasers kommen diesen Anforderungen bereits sehr nahe. Die Laser-Apparate in Tab. 6-1 sind jedoch ungeeignet, um in einem späteren Fusionsreaktor einen kontinuierlichen Betrieb zu gewährleisten. Dafür wären eine Pulsrate von ≈ 10 Hz und eine Effizienz (= Lichtenergie / Pumpenergie) von mehr als 10 % erforderlich [68]. Die heutigen Hochleistungslaser benötigen noch eine Abkühlpause von einigen Minuten zwischen zwei Pulsen (z.B. 10 min bei ASTERIX III (siehe [69], p. 146), 28 min bei OMEGA [70]); ihre Effizienz liegt bei 0.1 % [70]. Parallel zu den Versuchen, die Spitzenleistung zu erhöhen, laufen daher Bestrebungen, die Pulsrate und damit die mittlere Leistung anzuheben. Dabei werden KrF-Laser ($\lambda = 248$ nm) favorisiert [68]. Die Chancen von Festkörper-Lasern werden wegen der schlechten Kühlmöglichkeiten weniger gut beurteilt, wenngleich durch eine neue Auslegung der Laser-Apparatur und neue Materialien deutliche Verbesserungen erreichbar sind [71]. CO₂-Laser, mit denen am einfachsten Wiederholungsraten von einigen 100 Hz zu erzielen wären (siehe [72], p. 28), haben eine für Fusionszwecke zu geringe Wellenlänge ($\lambda = 10600$ nm). Sie verlieren im Rahmen der Fusionsforschung zunehmend an Bedeutung.

Der Überblick über die verfügbaren Hochleistungslaser zeigt, daß ein dichtes Photonentarget derzeit nur einmal im Zeitraum von mehreren Minuten verfügbar ist. Man kann jedoch erwarten, daß sich in absehbarer Zukunft die Situation durch Fortschritte in der Laserforschung deutlich verbessert. Pulsraten in der Größenordnung von einigen Hz für Hochleistungslaser sind nicht utopisch. Das bedeutet, daß die eingangs skizzierte Anordnung zur Messung der Endzustandspolarisation sinnvoll eingesetzt werden könnte, wenn die Wiederholungsrate ν , mit der beschleunigte Teilchen in der Wechselwirkungszone aufeinandertreffen, ebenfalls klein ist. Diese Voraussetzung erfüllen die Beschleunigeranlagen SLAC-SLC ($\nu = 180$ Hz [14]) und VLEPP ($\nu = 10$ Hz [28]). Ringbeschleuniger mit einer Repetitionsrate von $\nu \approx 10^6$ Hz kommen nicht in Betracht (es sei denn, man verwendet einen einmal erzeugten Laserpuls durch Spiegelung mehrfach).

Um konkrete Verhältnisse vor Augen zu haben, orientieren wir uns an der Auslegung des SLAC-SLC-Beschleunigers [14]. Die Maschine soll in der ersten Ausbaustufe Elektronen und Positronen auf jeweils 50 GeV beschleunigen. Die Teilchen werden in Bündeln erzeugt, die in der Wechselwirkungszone einen Durchmesser von $2.6 \mu\text{m}$ haben und 1 mm lang sind.

Ferner wird im folgenden angenommen, daß ein Hochleistungslaser zur Verfügung steht, der bei einer Spitzenleistung von $L = 10^{12}$ Watt = 1 TW einen Puls der Länge $t = 10^{-10}$ s abgibt. (Über die Pulsfrequenz werden keine Annahmen gemacht.) Das Photonenbündel wird auf einen Durchmesser von $d = 30 \mu\text{m}$ fokussiert [28]. Man errechnet unter der zusätzlichen Voraussetzung einer zylindrischen Pulsform mit homogener Dichteverteilung: 1) Das Bündel hat eine Länge von $l = 3$ cm; 2) sein Energieinhalt beträgt 100 Joule; 3) seine Photonendichte n_2 ist

$$n_2 = \frac{L t}{E_{2,L} (d/2)^2 \pi l} = \frac{L}{E_{2,L} (d/2)^2 \pi c} \quad (6-32)$$

$$\approx \frac{1}{(E_{2,L} / \text{eV})} \cdot 2.94 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}.$$

c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit, $E_{2,L}$ die Energie eines Laserphotons.

Um mit diesem räumlich komprimierten Photonenbündel einen großen Raumwinkelbereich zu überdecken, muß es möglichst dicht an der Wechselwirkungszone vorbeilaufen, etwa im Abstand von $D \approx 50 - 100 \mu\text{m}$. Beim SLAC-SLC beträgt der Durchmesser des Strahlrohres ca. 1.6 cm. Der Laserstrahl läuft daher im Bereich der Wechselwirkungszone innerhalb des Strahlrohres.

In Abb. 6-4 ist die eben beschriebene Anordnung schematisch dargestellt. Im einzelnen ereignet sich folgendes: Ein Elektron, das auf ein

Laserphoton trifft, verliert einen Teil seiner Energie $E_{1,L}$ und erzeugt mit großer Wahrscheinlichkeit (vgl. die Energiespektren in Abb. 6-3) ein hochenergetisches Photon mit der Energie $E_{3,L}$. Um das Energiespektrum zu bestimmen, ist die Kenntnis von zwei der drei Größen $E_{1,L}$, $E_{3,L}$ und $E_{4,L}$ erforderlich. Das bedeutet, der Detektor muß das γ -Quant und das gestreute Elektron getrennt registrieren. Die Trennung des rückgestreuten Photons vom annähernd kollinear mitfliegenden gestreuten Elektron (Öffnungswinkel $O(1/\gamma_{1,L})$) kann mit Hilfe eines magnetischen Hochenergiedetektors (siehe z.B. [76,77]) durchgeführt werden. Die beiden Teilchen durchlaufen zunächst den zentralen Teil des Detektors, bestehend aus einer Driftkammer in einem Magnetfeld von ungefähr einem Tesla. Danach gelangen sie in Schauerzähler, in denen ihre Energie gemessen wird.

Zwei Möglichkeiten sind denkbar, um die Energie von Elektron und γ -Quant separat zu bestimmen. Die erste Möglichkeit ist, das Elektron im Magnetfeld des Zentraldetektors so weit abzulenken, daß sich die Schauer von Elektron und Photon nicht überlagern. Man mißt dann die Energie von Elektron und Photon getrennt in den Schauerzählern. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, den Impuls des Elektrons aus der Bahnkurve im Zentraldetektor zu bestimmen und in den Kalorimetern die Summe aus Elektronen- und Photonenenergie zu messen. Beispielsweise könnte man mit dem SLD-Detektor [77], für den über einem Bereich von 97 % des gesamten Raumwinkels (das entspricht dem Intervall $14^\circ \leq \theta \leq 166^\circ$ für den Winkel θ aus Abb. 6-4) eine Impulsauflösung von

$$\frac{\sigma(p)}{p} = 0.1 \% \times (p / \text{GeV}) \quad (6-33)$$

in der Driftkammer und eine Energieauflösung von

$$\frac{\sigma(E)}{E} = 8 \% / \sqrt{E / \text{GeV}} \quad (6-34)$$

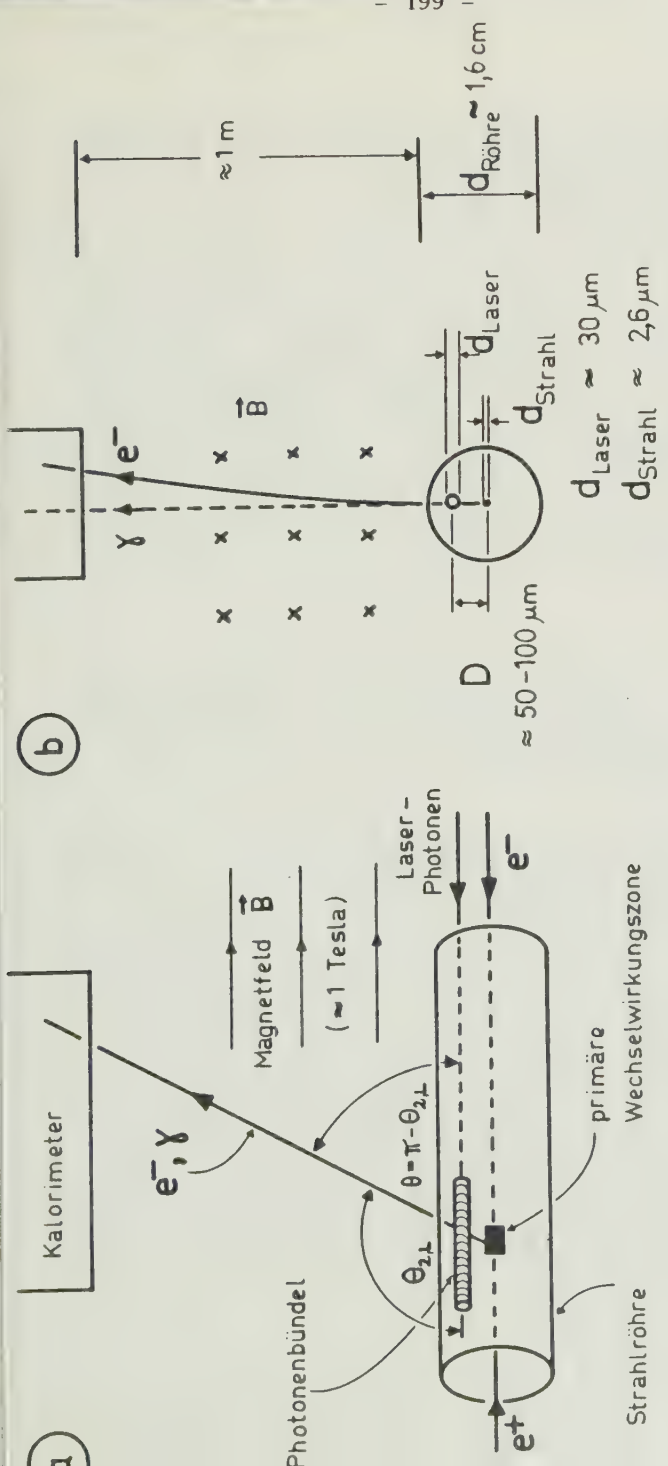


Abb. 6 - 4 : Schematische Darstellung der vorgeschlagenen Polarimeteranordnung: Abb. a) Seitenansicht; Abb. b) Frontansicht. Die Werte für d_{Strahl} und $d_{\text{Röhre}}$ sind SLC-Daten [14]; die Stärke des Magnetfeldes ($|\vec{B}| \approx 1 \text{ Tesla}$) und der Abstand zwischen Strahlröhre und Kalorimeter sind typische Werte für magnetische Hochenergiedektoren.

in den elektromagnetischen Schauerröhren angestrebt wird, das Energiespektrum auf die zweite Art bestimmen.

Der Compton-Streuprozess kann durch geeignete Wahl des kinematischen Parameters X aus (6-27) beeinflusst und an die Energie der zu analysierenden Elektronen angepaßt werden (vgl. die ausführlichere Diskussion im nächsten Abschnitt). Bei vorgegebener Energie $E_{1,L}$ der zu analysierenden Elektronen (Positronen) läßt sich X über die Energie $E_{2,L}$ der Laserphotonen und durch Wahl des Einfallswinkels $\Theta_{2,L}$ variieren. Da sich nach Tab. 6 - 1 die Wellenlänge von Hochleistungslasern über den Bereich von $\lambda = 10600 \text{ nm}$ (CO_2 , $E_{2,L} = 0.117 \text{ eV}$) bis $\lambda = 248 \text{ nm}$ (KrF , $E_{2,L} = 5.02 \text{ eV}$) erstreckt, ist der Spielraum bei der Festlegung der Analysestreuung recht groß.

Modifikationen der Anordnung aus Abb. 6 - 4 sind denkbar. Da man die beschleunigten Teilchen am SLAC-SLC nur einmal verwendet, ist es nicht notwendig, Laserpuls und Teilchenstrahl aneinander vorbeizuführen. Zwei Möglichkeiten bieten sich an:

1) Will man die Polarisation von Elektronen untersuchen, welche die Wechselwirkungszone des Primärprozesses unter kleinen Winkeln θ gegenüber der Strahlachse verlassen (vgl. Abb. 6 - 4), dann kann es vorteilhaft sein, einen weniger stark gebündelten Photonenpuls ($d \approx 1 \text{ mm}$) unmittelbar hinter einem der Teilchenbündel (Elektronen in Abb. 6 - 4) herlaufen zu lassen. Gestreute Teilchen, für die θ höchstens einige 10 mrad beträgt, durchqueren das Photonentarget und werden auf die oben angegebene Art Compton-gestreut und in einem separaten Detektor analysiert. Die ungestreuten Strahlteilchen (Positronen) des entgegenkommenden Teilchenbündels wechselwirken zwar ebenfalls zu einem großen Teil mit den Laserphotonen und bilden harte γ -Quanten. Diese verlassen aber annähernd kollinear zu den einfallenden Positronen die Wechselwirkungszone, gelangen nicht in den Detektor und stören nicht weiter.

2) Es ist denkbar, daß das Photonenbündel die Wechselwirkungszone durchsetzt und umhüllt, während die Teilchenstrahlen kollidieren ($D=0$ in Abb. 6-4). Der große Vorteil dieser Anordnung wäre, daß ein einziger Laserpuls den gesamten Raumwinkel von 4π überdecken würde.

Eine solche Anordnung läßt sich verwenden, falls die entgegenkommenden Teilchen keine Positronen sondern γ -Quanten sind. Es existieren Vorschläge, am SLAC-SLC hochenergetische Photonen (ca. 36 GeV) an hochenergetischen Elektronen (50 GeV) zu streuen [28]. γ -Quanten mit einer Energie von 36 GeV zeigen nur geringe Wechselwirkung mit den Laserphotonen, da der Prozess niedrigster Ordnung (Paarerzeugung) energetisch noch verboten ist. Die Laserphotonen können - wie erwünscht - nur mit den Elektronen und Positronen im Endzustand reagieren. Die Voraussetzungen für die Messung der Polarisierung von Elektronen im Endzustand des Primärprozesses $e + \gamma \rightarrow e + \dots$ wären daher besonders günstig.

Für Primärprozesse, bei denen Elektronen und Positronen aufeinander treffen (normaler Betrieb des SLC), ist die Anordnung 2) nicht sehr geeignet: Wie unter 1) werden auch hier neben den Reaktionsprodukten die entgegenkommenden Positronen an den Photonen gestreut. Das ist problemlos solange Photonen und Positronen nach Passieren der Wechselwirkungszone aufeindertreffen: Es ändert sich nur die Zusammensetzung der Abfallprodukte. Ein Teil der Photonen läuft aber vor dem Elektronenstrahl her. Er trifft vor der Wechselwirkungszone auf Positronen. Wegen der großen Photonendichte ist bereits nach einer Wegstrecke in der Größenordnung von Millimetern ein erheblicher Teil des Positronenstrahls umgewandelt in ein Bündel aus hochenergetischen γ -Quanten und abgebremsten Positronen. Der Anfangszustand der Primärstreuung ändert sich. Man beobachtet zu einem beträchtlichen Teil e - γ -Streuprozesse. Die Anzahl der e^+e^- -Ereignisse nimmt ab. Diese Anordnung würde daher eine Rekonstruktion des Anfangszustandes aus den Streudaten notwendig machen.

6.3.2. Diskussion der Effektivität und der Realisierbarkeit der Anordnung

In Teil a) wird die Frage nach der Effizienz der in Abschnitt 6.3.1 beschriebenen Polarimeteranordnung mit Hilfe der Zählratenstatistik aus Abschnitt 2.2.1 behandelt: Zunächst werden die auf schrägen Einfall der Laserphotonen spezialisierten Formeln angegeben; danach wird ein Zahlenbeispiel besprochen. Die zugrundegelegten Daten sind an existierenden bzw. im Bau befindlichen Apparaten (Laser, Beschleuniger, Detektoren) ausgerichtet.

In Teil b) wird gezeigt, daß die Polarisationsasymmetrie des Energiespektrums mit Hilfe des geplanten SLD-Detektors meßbar ist. Die Genauigkeit dieser Messung wird in Abhängigkeit von der Wellenlänge des verwendeten Laserlichtes diskutiert.

Teil c) schließlich enthält eine Zusammenfassung der Resultate aus Abschnitt 6.3.2.

a) Die Effektivität der Anordnung (Zählratenstatistik)

Spezialisierung der Formeln aus Abschnitt 2.2.1

Zur Messung der longitudinalen Polarisation von Elektronen integriert man das Energiespektrum aus (6-31a) über den gesamten Azimutwinkelbereich, $0 \leq \phi_3 < 2\pi$, und über ein bestimmtes Intervall der Energie $E_{3,L}$ der gebildeten harten γ -Quanten. Die Energie-Integration entspricht einer Integration über die Variable $\rho \equiv E_{3,L} / E_{3,L;\max}$ (vgl. (6-29)) über den Bereich

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}.$$

Man erhält aus (6-31a)

$$\sigma[\rho_{\min}, \rho_{\max}] = \sigma_o[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \times \{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \} \quad (6-35a)$$

mit

$$\sigma_o[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \equiv 2\pi \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\sigma_o}{d\rho} d\rho, \quad (6-35b)$$

$$A_{LL}[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \equiv \frac{2\pi}{\sigma_o[\rho_{\min}, \rho_{\max}]} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\sigma_o}{d\rho} A_{LL}(\rho, X) d\rho. \quad (6-35c)$$

Der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_o/d\rho$ und der Asymmetriekoeffizient $A_{LL}(\rho, X)$ sind in (6-31b) und (6-31c) angegeben.

Da nach Abb. 6-3 die Polarisationsabhängigkeit am hochenergetischen Ende des Photonenspektrum am größten ist, setzen wir $\rho_{\max} = 1$ und betrachten die integrierten Größen $\sigma_o[\rho_{\min}, 1]$ und $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ als Funktion der unteren Integrationsgrenze $\rho_{\min}$. In Abb. 6-5 ist der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt $\sigma_o[\rho_{\min}, 1]$, in Abb. 6-6 der Asymmetriekoeffizient $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ für die Parameter-Werte $X = 0.2, 0.5, 1, 2$ und 5 aufgetragen.

Die Messung der Polarisation erfolgt wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben: Man verwendet zirkular polarisierte Laserphotonen mit Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(2)}$ und bestimmt die Anzahl N_A der dabei gebildeten harten γ -Quanten (Anordnung "A", vgl. (2-101)). Danach dreht man die zirkulare Polarisation der Laserphotonen um ($s_{\parallel}^{(2)} \rightarrow -s_{\parallel}^{(2)}$). In dieser Anordnung (Anordnung "B", vgl. (2-102)) werden N_B harte Photonen registriert. Aus der Zählratenasymmetrie $A_m = (N_A - N_B) / (N_A + N_B)$ (vgl. (2-104)) erhält man den Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(1)}$ der Elektronen. Die Anzahl N_o der Elektronen, die man benötigt, um $s_{\parallel}^{(1)}$ mit einer

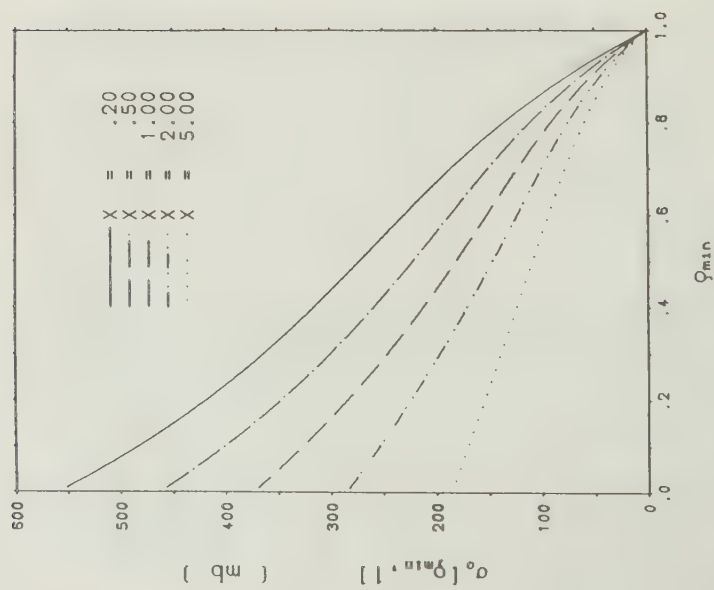


Abb. 6-5 :
Integrierter Wirkungsquerschnitt $\sigma_0[\rho_{\min}, 1]$ für Compton-Streuung (vgl. Gl. (6-35b)) als Funktion der Integrationsgrenze $\rho_{\min}$.

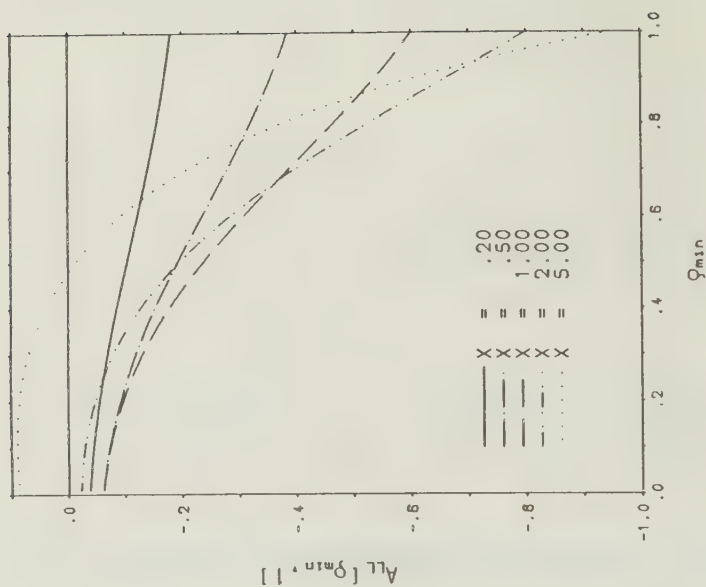


Abb. 6-6 :
Asymmetriekoeffizient $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ für Compton-Streuung (vgl. Gl. (6-35c)) als Funktion der Integrationsgrenze $\rho_{\min}$.

Genauigkeit von $\Delta s_{\parallel}^{(1)}$ bestimmen zu können, ist in (2-113) angegeben:

$$N_o = \frac{2}{(\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2} \times \frac{1 - \{s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\rho_{\min}, 1]\}^2}{(s_{\parallel}^{(2)})^2 2 T \Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1]}. \quad (6-36)$$

Dabei ist $\Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ der effektive Wirkungsquerschnitt

$$\Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1] \equiv \sigma_o[\rho_{\min}, 1] \times A_{LL}^2[\rho_{\min}, 1] \quad (6-37)$$

(vgl. (2-112)). $\sigma_o[\rho_{\min}, 1]$ und $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ sind in (6-35b) und (6-35c) definiert. Die explizite Gestalt des Targetfaktors wird etwas weiter unten behandelt (siehe Gl. (6-41)). In (6-36) ist nur der statistische Fehler berücksichtigt. Der Faktor 2 (von $\chi = 2$) im Zähler tritt auf, weil die Zählraten für links- und rechtszirkular polarisierte Photonen nacheinander gemessen werden (vgl. Abschnitt 2.2.1).

Der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ ist in Abb. 6-7 als Funktion der unteren Integrationsgrenze für verschiedene Werte des Parameters X aufgetragen. Man sieht, daß die Funktionen $\Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ Maxima im Bereich $\rho_{\min} = 0.7 \dots 0.9$ durchlaufen. Auf diese Weise läßt sich für einen vorgegebenen Wert von X der - bezüglich der Zählratenstatistik - günstigste Integrationsbereich ermitteln. Die größte Effektivität erhält man für X -Werte im Bereich von $X \approx 1 \dots 2$. Hier nimmt der effektive Wirkungsquerschnitt $\Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ Maximalwerte von ca. 20 mb an.

Es bleibt der explizite Ausdruck für den Targetfaktor T bei nicht kollinear kollidierenden Teilchen nachzutragen. Er wird im folgenden abgeleitet. Nach der Definitionsgleichung

$$W = \sigma \cdot T \quad (2-96)$$

ist T der Proportionalitätsfaktor, der für ein bestimmtes Target den Zusammenhang herstellt zwischen dem Wirkungsquerschnitt σ und der Wahrscheinlichkeit W , daß ein einfallendes Teilchen an diesem Target gestreut wird. Nach einer bekannten Formel (siehe z.B. [78]) läßt sich die Anzahl dv der Streueignisse durch den Wirkungsquerschnitt aus-

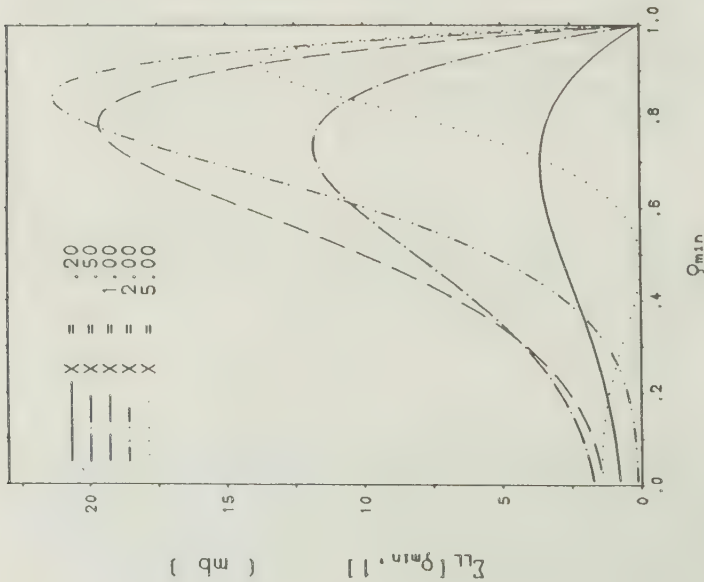


Abb. 6-7 :

Charakteristische Größe $\Sigma_{LL}[\rho_{min}, 1] \equiv \sigma_0[\dots] \times A_{LL}^2[\dots]$ für Compton-Streuung (vgl. Gl. (6-37)) als Funktion der Integrationsgrenze ρ_{min} .

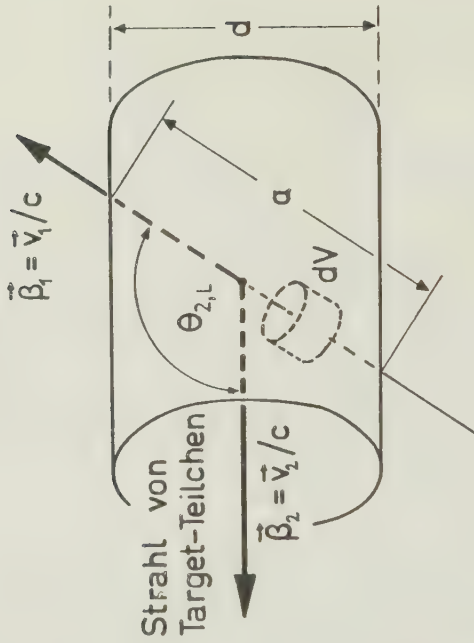


Abb. 6-8 :

Zur Ableitung von Gl. (6-39) über den Zusammenhang von Wirkungsquerschnitt und Streuwahrscheinlichkeit.

drücken.

$$d\nu = \sigma \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 - (\beta_1 \times \beta_2)^2} n_1 n_2 dV dt. \quad (6-38)$$

Es ist β_1 (β_2) die Geschwindigkeit des Teilchens 1 (2) in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, n_1 (n_2) die zugehörige Teilchendichte, dV das Volumen der Wechselwirkungszone und dt das Zeitintervall, in dem die Ereignisse $d\nu$ gezählt werden. Wählt man für dV ein Volumen, in dem ein Teilchen der Sorte 1 lokalisiert ist, so wird $n_1 dV = 1$ und $d\nu$ geht über in die Streuwahrscheinlichkeit W . Das Volumen dV – es sei vorausgesetzt, daß dV klein gegen die Targetabmessungen ist – bewegt sich mit der Geschwindigkeit β_1 durch das Target (vgl. Abb. 6-8). Ist a die Weglänge, die es im Target zurücklegt, dann kann man für dt den Ausdruck $dt = a / |\beta_1|$ einsetzen. Ist weiter n_2 längs dieses Weges konstant, so wird (6-38) schließlich zu

$$W = \frac{n_2 a}{|\beta_1|} \sigma \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 - (\beta_1 \times \beta_2)^2}. \quad (6-39)$$

Ein Vergleich von (2-96) mit (6-39) zeigt

$$T = \frac{n_2 a}{|\beta_1|} \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 - (\beta_1 \times \beta_2)^2}. \quad (6-40)$$

Für $|\beta_2| = 0$ erhält man den Spezialfall (3-2). Falls β_1 und β_2 den Winkel $\Theta_{2,L}$ einschließen und $|\beta_1| = |\beta_2| = 1$ gesetzt werden kann, wird T durch

$$T = a n_2 (1 - \cos \Theta_{2,L}) \quad (6-41)$$

beschrieben.

Für kollineare Kollision ($\Theta_{2,L} = \pi$) nimmt T den Wert $2 a n_2$ an. Der Faktor 2 ist eine Folge der Relativbewegung und trägt dem Umstand Rechnung, daß das Teilchen 1 beim Durchqueren einer Targetschicht

der Dicke D bereits nach der Wegstrecke $a = D/2$ wieder aus dem Target austritt. Bei nicht-kollinearer Kollision hängt der Targetfaktor T (= Anzahl der Target-Teilchen, die das Teilchen 1 pro Flächeneinheit sieht) von dem Winkel ab, unter dem sich die Teilchen kreuzen.

Zahlenbeispiel

Mit Hilfe der Gln. (6-36) und (6-41) und anhand des Funktionsverlaufes von $\Sigma_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ in Abb. 6-7 kann man die Effektivität der Polari-meteranordnung aus Abb. 6-4 diskutieren. Sie hängt ab von der Energie $E_{2,L}$ der Photonen und von dem Winkel θ ,

$$\theta = \pi - \Theta_{2,L}, \quad (6-42)$$

unter dem die zu analysierenden Teilchen die Wechselwirkungszone verlassen: Erstens legen nach (6-27) $\Theta_{2,L}$ und $E_{2,L}$ - zusammen mit der Energie $E_{1,L}$ der zu analysierenden Elektronen - den Parameter X fest; zweitens geht der Winkel θ in den Targetfaktor T aus (6-41) ein:

- direkt wegen des Faktors

$$1 - \cos\Theta_{2,L} = 1 + \cos\theta \quad (6-43)$$

(siehe Gl. (6-41)),

- indirekt über die Weglänge a , die das Elektron im Lasertarget zurücklegt. Nimmt man - wie Abschnitt 6.3.1 - der Einfachheit halber an, das Photonenbündel sei zylinderförmig, und setzt voraus, daß das Elektron durch die Achse dieses Zylinders läuft, dann ist

$$a = \frac{d}{\sin\Theta_{2,L}} = \frac{d}{\sin\theta}. \quad (6-44a)$$

d bezeichnet den Durchmesser des Photonenbündels. Die Weglänge a ist nach oben durch die Länge l des Laserpulses begrenzt. Damit (6-44a) gültig ist, muß

$$\sin\theta \geq d/l \quad (6-44b)$$

sein.

Verwendet man einen Hochleistungslaser mit $L = 10^{12}$ Watt bei einer Pulsdauer von $t = 10^{-10}$ s und fokussiert das Photonenbündel auf $d = 30 \mu\text{m}$, so erhält man für T aus (6-41) unter Verwendung von (6-32) und (6-44a)

$$T = \frac{1}{(E_{2,L} / 1.17 \text{ eV})} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \quad 0.754 \times 10^{23} \text{ cm}^{-2} \quad (6-45)$$

In Tab. 6 - 2 sind in Abhängigkeit vom Emissionswinkel θ einige Daten für den Compton-Streuprozess zusammengestellt. Es ist angenommen, daß die zu analysierenden Elektronen eine Energie von $E_{1,L} = 50 \text{ GeV}$ haben und daß sie auf vollständig zirkular polarisierte Photonen eines Nd-Glas-Lasers ($\lambda = 1060 \text{ nm}$, $E_{2,L} = 1.17 \text{ eV}$, $s_{\parallel}^{(2)} = 1$) treffen. Neben der Energie der gestreuten Teilchen (bestimmt mit (6-29)) ist die Anzahl N_o der zur Polarisationsmessung erforderlichen Elektronen angegeben. Die Berechnung von N_o erfolgt mit Hilfe von (6-36), wobei der von $s_{\parallel}^{(1)}$ abhängige Term

$$\{ s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\rho_{\min}, 1] \}^2$$

im Zähler von (6-36) vernachlässigt ist.

In Tab. 6 - 3 sind die entsprechenden Daten für Laserlicht der doppelten Frequenz angegeben ($E_{2,L} = 2.34 \text{ eV}$). Leistung, Pulsdauer und Fokussierung des Laserpulses haben dieselben Werte wie für Tab. 6 - 2. Photonendichte und Targetfaktor T sinken daher auf die Hälfte der für Tab. 6 - 2 angenommenen Werte ab. Man sieht, daß die Verwendung des kurzwelligeren Laserlichtes die Anzahl der erforderlichen Elektronen in etwa verdoppelt. Das ist vor allem auf die halbierte Photonendichte zurückzuführen. Wenn man bestrebt ist, die Zahl N_o möglichst klein zu

$\theta / ^\circ$	X	a / μm	$\rho_{\min}$	Energie der zu registrierenden		$N_o \times (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2$
				γ -Quanten $E_{3,L} / \text{GeV}$	Elektronen $E_{4,L} / \text{GeV}$	
90.	0.448	30.	0.6	15.47 ... 9.28	34.53 ... 40.72	1423.
30.	0.836	60.	0.7	22.77 ... 15.93	27.23 ... 34.07	209.
15.	0.881	116.	0.7	23.42 ... 17.56	26.58 ... 32.44	100.
10.	0.889	173.	0.7	23.53 ... 16.47	26.47 ... 33.52	66.3
1.	0.896	1718.	0.7	23.62 ... 16.54	26.37 ... 33.46	*)

Tab. 6 - 2 : Einige Daten für die in Abb. 6 - 4 vorgeschlagene Anordnung zur Messung der longitudinalen Polarisation: Elektronen der Energie $E_{1,L} = 50 \text{ GeV}$ verlassen die primäre Wechselwirkungszone unter dem Winkel θ und treffen auf die vollständig zirkular polarisierten Photonen eines Nd-Glas-Hochleistungslasers ($E_{2,L} = 1.17 \text{ eV}$, $L = 10^{12} \text{ W}$, $d = 30 \mu\text{m}$, $t = 10^{-10} \text{ s}$). Registriert werden rückgestreute γ -Quanten im Energiebereich $E_{3,L} = (\rho_{\min} \dots 1) \times E_{3,L;\max}$. (*) Mit Gl. (6-36) errechnet man $N_o \times (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2 \approx 6.5$. Jedoch kann bei einer Wegstrecke von $a = 1718 \mu\text{m}$ Vielfachstreuung nicht vernachlässigt werden (vgl. Abschnitt 6.4, Abb. 6 - 15).)

$\theta / ^\circ$	X	a / μm	$\rho_{\min}$	Energie der zu registrierenden		$N_o \times (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2$
				γ -Quanten $E_{3,L} / \text{GeV}$	Elektronen $E_{4,L} / \text{GeV}$	
90.	0.896	30.	0.7	23.63 ... 16.54	26.37 ... 33.46	1511.
30.	1.672	60.	0.75	31.29 ... 23.47	26.53 ... 18.71	359.
15.	1.762	116.	0.75	31.90 ... 23.93	26.08 ... 18.10	179.
10.	1.778	173.	0.75	32.00 ... 24.00	26.00 ... 18.00	120.
1.	1.792	1718.	0.75	32.09 ... 24.07	25.93 ... 17.91	*)

Tab. 6 - 3 : Einige Daten für die in Abb. 6 - 4 vorgeschlagene Anordnung zur Messung der longitudinalen Polarisation. Die zu analysierenden Elektronen der Energie $E_{1,L} = 50 \text{ GeV}$ treffen auf vollständig zirkular polarisierte Photonen der Energie $E_{2,L} = 2.34 \text{ eV}$ (= doppelte Energie der Photonen eines Nd-Glas-Lasers). Die übrigen Parameter des Photonenbündels und des Hochleistungslasers sind unverändert aus Tab. 6 - 2 übernommen ($L = 10^{12} \text{ W}$, $d = 30 \mu\text{m}$, $t = 10^{-10} \text{ s}$).

(*) Mit Gl. (6-36) errechnet man $N_o \times (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2 \approx 12.0$. Wegen der großen Wegstrecke a ist (6-36) jedoch nicht mehr anwendbar (vgl. Abschnitt 6.4, Abb. 6 - 15.).

halten, dann wird man also bei gegebener Laserleistung die niedrigere Photonenenergie und damit die höhere Photonendichte als günstiger ansehen. Ein Vergleich der Energien der Compton-gestreuten Elektronen in den beiden Tabellen macht aber auch deutlich, daß die kurzwelligern Photonen die Elektronen deutlich stärker abbremesen. Energiereichere Laserphotonen erlauben es, ein Compton-Streueignis experimentell leichter zu identifizieren. Darauf soll unter Punkt c) näher eingegangen werden.

(Eine ergänzende Bemerkung zu den Daten in Tab. 6 - 3: Da für festes $\theta = \pi - \Theta_{2,L}$ die kinematische Größe X nach (6-27) nur von dem Produkt $E_{1,L} \times E_{2,L}$ abhängt, beschreiben die X -Werte in Tab. 6 - 3 ebensogut die Streuung eines Elektrons mit der Energie $E_{1,L} = 100$ GeV an einem Photon eines Nd-Glas-Lasers mit der Energie $E_{2,L} = 1.17$ eV. Behält man daher in Tab. 6 - 3 die angegebenen Werte für $\rho_{\min}$ bei, multipliziert die Werte für die Energie der rückgestreuten Photonen ($E_{3,L}$) und für die Energie der gestreuten Elektronen ($E_{4,L}$) mit 2 (vgl. (6-28)) und die Daten in der Spalte $N_o \times (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2$ mit 1/2 (vgl. (6-45)), so erhält man aus Tab. 6 - 3 die Verhältnisse für die Streuung eines 100-GeV-Elektrons an den Photonen eines Nd-Glas-Lasers.)

b) Die Auflösbarkeit der Polarisationsasymmetrie des Energiespektrums (diskutiert am Beispiel des SLD-Detektors)

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob die Genauigkeit, mit welcher an derzeit geplanten Detektoren die Energie und der Impuls von Elektronen und Photonen gemessen werden soll, ausreicht, um die Zählratenasymmetrie

$$A_m \equiv \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B} \quad (6-46)$$

zu bestimmen, aus der man mittels

$$A_m = s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\rho_{\min}, 1] \quad (6-47)$$

die longitudinale Polarisation eines Elektrons erhält. Die Diskussion wird beispielartig mit Hilfe der Daten (6-33) und (6-34) des geplanten SLD-Detektors [77] geführt.

Dazu berechnet man zunächst, wie sich die Fehler aus der Energiemessung auf die Asymmetriegröße A_m auswirken. Formel (2-106) für die Fehlerfortpflanzung liefert für das Quadrat dieses systematischen Fehlers δA_m den Ausdruck

$$\delta A_m^2 = 4 \frac{N_B^2 \delta N_A^2 + N_A^2 \delta N_B^2}{(N_A + N_B)^4} \quad (6-48)$$

Die Anzahl N_A (N_B) der in Anordnung "A" ("B") registrierten harten γ -Quanten ist proportional zu dem von $\rho = \rho_{\min}$ bis $\rho = 1$ integrierten Energiespektrum $d\sigma/d\rho$ aus (6-31a) (vgl. die Abb. 6-3):

$$N_{\substack{A \\ B}} = C \sigma_o[\rho_{\min}, 1] \{1 \pm A_m\} \quad (6-49a)$$

A_m ist in (6-47) und $\sigma_o[\rho_{\min}, 1]$ in (6-35b) definiert; C bezeichnet den Proportionalitätsfaktor. Die systematischen Fehler δN_A und δN_B sind proportional zu $\delta \rho_{\min} \times d\sigma/d\rho$. Dabei gibt $\delta \rho_{\min}$ den Fehler aus der Energiemessung an; $d\sigma/d\rho$ ist an der Stelle $\rho = \rho_{\min}$ zu nehmen. Es gilt

$$\delta N_{\substack{A \\ B}} = C \delta \rho_{\min} \frac{d\sigma_o(\rho_{\min})}{d\rho} \{1 \pm A(\rho_{\min})\} \quad (6-49b)$$

mit der differentiellen Polarisationsasymmetrie

$$A(\rho_{\min}) \equiv s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\rho_{\min}, X)$$

und $A_{LL}(\rho_{\min}, X)$ aus (6-31c).

Einsetzen in (6-48) ergibt

$$\begin{aligned}
 |\delta A_m| &\approx \frac{\delta \rho_{\min} \, d\sigma(\rho_{\min})/d\rho}{\sigma_o [\rho_{\min}, 1]} \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[1 - A_m A(\rho_{\min})]^2 + [A(\rho_{\min}) - A_m]^2} \\
 &\leq \frac{\delta \rho_{\min} \, d\sigma(\rho_{\min})/d\rho}{\sigma_o [\rho_{\min}, 1]} \times 2 .
 \end{aligned} \tag{6-50}$$

Für $\delta \rho_{\min}$ erhält man unter Verwendung von $\rho_{\min}$ aus (6-29), $E_{3,L;\max}$ aus (6-28) und X aus (6-27)

$$\begin{aligned}
 \delta \rho_{\min} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_{\min}}{\partial E_{1,L}}\right)^2 (\Delta E_{1,L})^2 + \left(\frac{\partial \rho_{\min}}{\partial E_{4,L}}\right)^2 (\Delta E_{4,L})^2} \\
 &= \sqrt{\left(\rho_{\min} \frac{X+2}{X+1} - \frac{X+1}{X}\right)^2 \left(\frac{\Delta E_{1,L}}{E_{1,L}}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{X} - \rho_{\min}\right)^2 \left(\frac{\Delta E_{4,L}}{E_{4,L}}\right)^2} .
 \end{aligned} \tag{6-51}$$

Zu dieser Gleichung einige Zahlenbeispiele: Elektronen der Energie $E_{1,L} = 50$ GeV treffen unter einem Winkel von $\theta = 30^\circ$ auf Photonen der Energie $E_{2,L} = 1.17$ eV bzw. 2.34 eV ; das Photonenbündel habe dieselbe Dichte und Gestalt wie bei der Berechnung der Daten in den Tabellen 6-2 und 6-3; die Energie des ungestreuten Elektrons soll aus der Summe der von dem gestreuten Elektron und dem rückgestreuten Photon im Schauerzähler deponierten Energie bestimmt werden; die Energie $E_{4,L}$ der Compton-gestreuten Elektronen werde aus der Bahnkrümmung im Magnetfeld der Driftkammer ermittelt.

Aus der Fehlerangabe (6-34) folgt eine Meßgenauigkeit für die Energie des einlaufenden Elektrons von

$$\frac{\Delta E_{1,L}}{E_{1,L}} = \frac{0.57 \text{ GeV}}{50 \text{ GeV}} = 1.14 \% .$$

Mit der Fehlerabschätzung (6-33) erhält man für die Energie der Elektronen an der oberen Schwelle des Energiefensters Meßwerte von

$$E_{4,L} = (34.07 \pm 1.16) \text{ GeV}$$

(bei $E_{2,L} = 1.17 \text{ eV}$, vgl. Tab. 6 - 2) bzw.

$$E_{4,L} = (26.53 \pm 0.70) \text{ GeV}.$$

(bei $E_{2,L} = 2.34 \text{ eV}$, vgl. Tab. 6 - 3). Daraus läßt sich mittels

$$E_{3,L} = E_{1,L} - E_{4,L}$$

die minimale Energie der zu registrierenden rückgestreuten Photonen ermitteln. Bei quadratischer Addition der Einzelfehler erhält man einen Wert von

$$E_{3,L} = (15.93 \pm 1.29) \text{ GeV}$$

(für Laserphotonen der Energie 1.17 eV) bzw. von

$$E_{3,L} = (23.47 \pm 0.90) \text{ GeV}$$

(für Photonen der Energie 2.34 eV).

Mit Hilfe von (6-50) und (6-51), und mit den eben angegebenen Fehlern der Energiemessung, kann man den systematischen Fehler δA_m für die Zahlenbeispiele zu $\theta = 30^\circ$ aus den Tabellen 6 - 2 und 6 - 3 bestimmen. Die Laserphotonen und die Elektronen seien als vollständig zirkular bzw. longitudinal polarisiert vorausgesetzt, sodaß

$$A_m = A_m(s_{\parallel}^{(1)=1}, s_{\parallel}^{(2)=1}) = A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$$

ist. Zusammen mit den Zahlenwerten für $d\sigma_o/d\rho$ aus den Abbn. 6-3 und mit $\sigma_o[\rho_{\min}, 1]$ aus Abb. 6-5 erhält man die Zahlenangaben in Tab. 6-4.

Bezug auf	$E_{2,L}/\text{eV}$	X	$\rho_{\min}$	$\delta\rho_{\min}$	δA_m	$ \delta A_m / A_m $
Tab. 6-2	1.17	0.836	0.70	0.053	0.0922	0.255
Tab. 6-3	2.34	1.672	0.75	0.023	0.0491	0.106

Tab. 6-4

Tab. 6-4 zeigt, daß für Elektronen von 50 GeV das Verhältnis $\delta A_m / A_m$ günstiger wird, wenn man die energiereicheren Laserphotonen verwendet. Während für vollständig polarisierte Elektronen bei der Streuung an Photonen von 1.17 eV ein systematischer Fehler $\delta s_{\parallel}^{(1)}$ von

$$\delta s_{\parallel}^{(1)} = \frac{\delta A_m}{A_m} = \frac{0.0922}{0.362} = 25.5 \%$$

entsteht, verringert sich dieses Verhältnis bei doppelter Photonenenergie auf

$$\delta s_{\parallel}^{(1)} = \frac{\delta A_m}{A_m} = \frac{0.0491}{0.463} = 10.6 \%$$

Der statistische Fehler dagegen ist für die energieärmeren Photonen kleiner. Setzt man voraus, daß beide Laser dieselbe Pulsform und Leistung haben, so benötigt man nach Tab. 6-2 für Photonen von 1.17 eV zur Polarisationsmessung mit der Genauigkeit $\Delta s_{\parallel}^{(1)}$

$$N_o \approx 209 / (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2$$

Elektronen, während es nach Tab. 6 - 3 für Photonen von 2.34 eV

$$N_o \approx 359 / (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2$$

Teilchen sind. Wie bereits erwähnt, kommt dieser Unterschied vor allem daher, daß bei Verwendung der energiereicheren Photonen die Teilchendichte im Target nur halb so groß ist. Die geänderten kinematischen Verhältnisse spielen nur eine untergeordnete Rolle.

Das Wechselspiel zwischen systematischem und statistischem Fehler ist in Tab. 6 - 5 ausführlicher wiedergegeben. Hier sind einige Daten zusammengestellt für Elektronen mit einer Energie von $E_{1,L} = 29.2, 58.8$ und 119.6 GeV, die wiederum unter einem Winkel von $\theta = 30^\circ$ die primäre Wechselwirkungszone verlassen (d.h. $\Theta_{2,L} = 150^\circ$). Betrachtet wird die Streuung an den Photonen eines Nd-Glas-Lasers ($E_{2,L} = 1.17$ eV). Daneben findet man in Tab. 6 - 5 Daten für die Verwendung von frequenzverdoppelten ($E_{2,L} = 2.34$ eV) und von frequenzverdreifachten Photonen ($E_{2,L} = 3.51$ eV). In diesen Fällen ist vorausgesetzt, daß die Photonenzahl auf die Hälfte bzw. auf ein Drittel des Wertes für Photonen der Energie 1.17 eV absinkt, d.h. Leistungsverluste bei Frequenzvervielfachung bleiben unberücksichtigt. Der in Tab. 6 - 5 aufgeführte Fehler δA_m gilt für $s_{\parallel}^{(1)} = s_{\parallel}^{(2)} = 1$. Er ist berechnet unter der Voraussetzung, daß (wie in Tab. 6 - 4) die Energien $E_{1,L} = E_{3,L} + E_{4,L}$ und $E_{4,L}$ gemessen werden und daß die Meßfehler bei der Energiebestimmung durch die Daten des SLD-Detektors aus (6-33) (für $E_{4,L}$) und (6-34) (für $E_{1,L}$) festgelegt sind.

Der systematische Fehler δA_m ist in erster Linie auf die Messung der Elektronenenergie aus der Bahnkrümmung im Magnetfeld der Driftkammer zurückzuführen. Der relative Fehler für diese Energiebestimmung wächst linear mit der Energie an (vgl. (6-33)). Es ist daher günstig, wenn die Elektronen durch die Compton-Streuung möglichst stark abgebremst werden. Da nach (6-28) die Energie der gestreuten Elektronen mit wachsendem X, d.h. mit zunehmender Energie der

$E_{2,L}$ (eV)	$E_{1,L}$ (GeV)	X	ρ_{min}	δA_m (%)	$ A_m $ (%)	$ \delta A_m/A_m $ (%)	$N_o (\Delta s_{ }^{(1)})^2$
1.17	29.9	0.5	0.6	8.75	23.5	37.3	345.
2.34	"	1.0	"	4.84	30.7	15.9	497.
3.51	"	1.5	"	3.67	30.8	11.9	745.
1.17	"	0.5	0.7	10.2	27.8	36.5	304.
2.34	"	1.0	"	5.04	38.4	13.1	391.
3.51	"	1.5	"	3.64	40.7	8.94	587.
1.17	"	0.5	0.8	13.9	31.9	43.6	314.
2.34	"	1.0	"	5.83	46.3	12.6	363.
3.51	"	1.5	"	3.83	51.6	7.42	544.
1.17	59.8	1.0	0.6	8.78	30.7	28.6	248.
2.34	"	2.0	"	5.23	28.3	18.6	719.
3.51	"	3.0	"	3.86	21.3	18.1	2141.
1.17	"	1.0	0.7	9.11	38.4	23.7	196.
2.34	"	2.0	"	5.10	39.4	12.9	456.
3.51	"	3.0	"	3.73	33.3	11.2	1075.
1.17	"	1.0	0.8	10.5	46.3	22.7	181.
2.34	"	2.0	"	5.09	52.3	9.73	346.
3.51	"	3.0	"	3.63	48.6	7.47	667.
1.17	119.6	2.0	0.6	10.23	28.3	36.1	359.
2.34	"	4.0	"	5.98	14.6	40.9	3306.
3.51	"	6.0	"	4.33	4.2	> 100.	∞
1.17	"	2.0	0.7	9.97	39.4	25.3	228.
2.34	"	4.0	"	5.77	26.5	21.8	1219.
3.51	"	6.0	"	4.15	15.2	27.3	≈ 6300 .
1.17	"	2.0	0.8	9.98	52.3	19.1	173.
2.34	"	4.0	"	5.57	42.8	13.0	615.
3.51	"	6.0	"	3.99	31.6	12.6	1870.

Tab. 6 - 5 : Einige Daten für die Compton-Streuung von Elektronen der Energie $E_{1,L}$ an Laserphotonen der Energie $E_{2,L}$. Die Flugrichtung der Teilchen weicht um $\theta = 30^\circ$ von kollinearere Kollision ab. Angenommene Kenndaten des Laserpulses: $L = 10^{12}$ W, $t = 10^{-10}$ s, $d = 30 \mu m$.

Laserphotonen, kleiner wird, erwartet man, daß für feste Energie $E_{1,L}$ der einfallenden Elektronen und konstantes $\rho_{\min}$ auch der systematische Fehler δA_m für die Asymmetrie mit wachsendem X abfällt. Die Zahlenwerte in Tab. 6-5 bestätigen dies.

Etwas komplizierter ist das Verhalten von $\delta A_m / A_m$: Die integrierte Polarisationsasymmetrie $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ ($= A_m$ für $s_{\parallel}^{(1)} = s_{\parallel}^{(2)} = 1$) durchläuft bei festgehaltener Energiegrenze $\rho_{\min}$ ein Maximum im Bereich von $X \approx 1 \dots 3$ (Die Lage des Maximums ist von $\rho_{\min}$ abhängig, wie man sich anhand von Abb. 6-6 klarmachen kann.) Für die Energie $E_{1,L} = 29.9$ GeV liegen die X -Werte so, daß $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ ansteigt, wenn man die Energie der Laserphotonen erhöht. Daher fällt auch $\delta A_m / A_m$ mit zunehmender Energie der Laserphotonen ab. Hingegen wird $A_{LL}[\rho_{\min}, 1]$ kleiner, wenn man bei einer Elektronenenergie von $E_{1,L} = 119.6$ GeV die Photonenenergie und damit X vergrößert. Man registriert bei festem $\rho_{\min}$ und variabler Energie der Laserphotonen ein Minimum im Funktionsverlauf von $\delta A_m / A_m$. Es ist allerdings nicht sehr ausgeprägt.

Die Daten in Tab. 6-5 zusammenfassend stellt man fest, daß es zur Vermeidung systematischer Fehler günstig ist, kurzwelligeres Laserlicht zu verwenden. Dadurch wächst jedoch die Anzahl N_o der zur Polarisationsmessung erforderlichen Elektronen an. Durch geeignete Wahl der Laserwellenlänge und der Minimalenergie $\rho_{\min}$ der registrierten rückgestreuten Photonen ist es möglich, für jede Energie $E_{1,L}$ der einfallenden Elektronen im Bereich

$$30 \text{ GeV} \lesssim E_{1,L} \lesssim 120 \text{ GeV}$$

gleichzeitig

$$|\delta A_m / A_m| \lesssim 15 \%$$

und

$$N_o \times (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2 \lesssim 300$$

zu erreichen. Die Zahlenangaben beziehen sich auf die Messung vollständig longitudinal polarisierter Elektronen.

c) Zusammenfassende Diskussion;

Möglichkeiten zur Verbesserung der vorgeschlagenen Anordnung

Unter a) und b) sind statistische und systematische Fehler für die in Abschnitt 6.3.1 besprochene Anordnung zur Messung der Polarisation mittels eines Hochleistungslasers angegeben. In die Berechnungen gehen Annahmen über die Form der Photonenverteilung im Laserbündel und über die Art der Registrierung der Streuteilchen ein. Eine Diskussion der Auswirkungen dieser Annahmen gestattet einen Ausblick auf mögliche Verbesserungen der Anordnung.

Der systematische Fehler bei der Bestimmung der Polarisationsasymmetrie sinkt für Elektronen mit einer Energie im Bereich von 50 GeV mit zunehmender Energie der Laserphotonen. Ultraviolettes Laserlicht ($\lambda \approx 330$ nm) ist hier am günstigsten. Für $E_{1,L} \approx 100$ GeV erweist sich grünes Laserlicht ($\lambda \approx 500$ nm) als am besten geeignet. Die Wellenlänge des bezüglich seiner relativ hohen Repetitionsrate interessanten CO_2 -Lasers ($\lambda = 10600$ nm $\rightarrow X \approx 0.05$) ist zu groß, um damit die Polarisationsasymmetrie des Energiespektrums von Elektronen im Bereich 50 – 100 GeV messen zu können.

Der systematische Fehler der Energieauflösung ist unter der Annahme berechnet, daß die Energie der gestreuten Elektronen aus der Krümmung der Bahnkurve im Magnetfeld des Zentraldetektors bestimmt wird und daß man die Energie des einfallenden Elektrons aus der Gesamtenergie der Streuprodukte des Compton-Streuprozesses ermittelt. Die angegebenen Zahlenwerte hängen von den Parametern der Registriervorrichtung ab, hier von dem Leistungsvermögen des projektierten SLD-Detektors. Sie sind nicht als prinzipielle Grenzen anzusehen, sondern sie sollen illustrieren, daß mit den in absehbarer Zeit zur Verfügung stehenden Detektoren die erforderlichen Asymmetriemessungen durchführbar sind. Will man den systematischen Fehler

verringern, so muß man in erster Linie die Energiebestimmung der gestreuten Elektronen verbessern, da sie die Hauptfehlerquelle darstellt.

Der statistische Fehler sinkt mit der Ereignisrate. Diese ist proportional zum Targetfaktor T ; T wiederum ist nach (6-41) proportional zur Photonendichte n_2 . Das ist der Hauptgrund weshalb in Tab. 6-5 die Anzahl N_0 der zur Polarisationsmessung erforderlichen Elektronen mit der Energie der Laserphotonen sinkt: Unter der Voraussetzung von konstanter Pulsenergie ist die Photonendichte für langwelliges Licht am größten. Durch Verwendung von dichteren Photonentargets (oder äquivalent dazu durch Verlängerung der Flugstrecke innerhalb des Targets) läßt sich die Ereignisrate steigern und damit die Anzahl der für eine Polarisationsmessung erforderlichen Elektronen senken.

Größere Photonendichten lassen sich erzielen, indem man Laser mit höherer Spitzenleistung verwendet. Das bedeutet, daß entweder der Energieinhalt des Laserpulses größer oder die Pulsdauer kleiner wird. Für die in Abb. 6-4 vorgeschlagene Anordnung erscheint vor allem der zweite Weg vielversprechend, da die erforderliche Energiemenge nicht steigt und bei entsprechend genauer Synchronisierung des Laserpulses mit den Teilchenbündeln des Beschleunigers ein wesentlich kürzeres Photonenbündel ausreichend ist.

Die Verwendung dichterer Photonentargets wird im nächsten Abschnitt behandelt.

6.4. Vielfachstreuung

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die Verwendung von Photonentargets größerer Dichte - oder äquivalent dazu die Verlängerung der Flugstrecke der Elektronen innerhalb des Photonentargets - auf die Eignung von Compton-Streuung zur Polarisationsmessung auswirkt. Ein Elektron, das ein zylindrisches Photonenbündel (mit

homogener Dichteverteilung und Durchmesser $d = 30 \text{ } \mu\text{m}$) eines Nd-Glas-Hochleistungslasers (Leistung 10^{12} Watt , Pulsdauer 10^{-10} s) unter einem Winkel von $\theta = 30^\circ$ kreuzt (vgl. Abb. 6 - 4), wird mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \sigma_{\text{tot}} \cdot T \approx (190 \dots 460 \text{ mb}) \times T \\ &= 0.071 \dots 0.173 \end{aligned} \quad (6-52)$$

Compton-gestreut. Dabei ist T der Targetfaktor aus (6-45). Die Zahlenangaben für W_{tot} gelten für Werte des kinematischen Parameters X im Bereich

$$0.5 \leq X \leq 5.0 .$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} zu diesen Parameterwerten erhält man durch Ablesen des integrierten Wirkungsquerschnittes in Abb. 6 - 5 an der Stelle $\rho_{\text{min}} = 0$: $\sigma_{\text{tot}} \approx 190 \text{ mb}$ für $X = 5$ und $\sigma_{\text{tot}} \approx 460 \text{ mb}$ für $X = 0.5$.

Die totale Streuwahrscheinlichkeit W_{tot} liegt im Bereich von 10% . Sie ist proportional zur Photonendichte und proportional zur Weglänge der Elektronen im Photonentarget (vgl. (6-41)). Vergrößert man die Photonendichte oder die Weglänge, so kommt man sehr bald in einen Bereich, in dem die Formel (6-52) nicht mehr anwendbar ist und zu Streuwahrscheinlichkeiten $W_{\text{tot}} \geq 1$ führen würde. Die erforderlichen Modifikationen infolge der Verringerung der Einschußteilchendichte mit zunehmender Weglänge werden in Abschnitt 6.4.1 behandelt. Außerdem wächst bei zunehmender Weglänge die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bereits gestreutes Elektron erneut mit einem der Laserphotonen wechselwirkt. In Abschnitt 6.4.2 wird untersucht, wie sich Mehrfachstreuereignisse auf die Polarisationsasymmetrie und auf die Eignung zur Polarisationsmessung auswirken.

Zur Vereinfachung der Diskussion in diesem Abschnitt wird im folgenden der Begriff der *effektiven Weglänge* b definiert (auch als effektive Wegstrecke oder effektive Flugstrecke bezeichnet). Der Definition liegt zugrunde, daß die Streuwahrscheinlichkeit im wesentlichen von dem

Produkt aus der Weglänge a im Lasertarget und der (längs a konstanten) Photonendichte n_2 abhängt. Nach (2-96) und (6-41) gilt

$$W = d\sigma T = d\sigma a n_2 (1 - \cos\theta_{2,L}). \quad (6-53)$$

Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ wird durch den Parameter X aus (6-27) und den Phasenraum der betrachteten Streuteilchen festgelegt; $\theta_{2,L}$ ist der Winkel, um den die Flugrichtung der Laserphotonen gegenüber der Impulsrichtung der Elektronen gedreht ist (vgl. Abb. 6-4). Verwendet man zur Normierung der Photonendichte n_2 die Teilchendichte

$$n_{2,0} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3},$$

des Nd-Glas-Lasers aus Abschnitt 6.3.1 (siehe (6-32) mit $E_{2,L} = 1.17 \text{ eV}$) und definiert die effektive Weglänge b gemäß

$$b \equiv a \frac{n_2}{n_{2,0}} \frac{1}{2} (1 - \cos\theta_{2,L}), \quad (6-54a)$$

so wird (6-53) zu

$$W = d\sigma \cdot 2 n_{2,0} b \equiv d\sigma \cdot K_0 b \quad (6-54b)$$

mit

$$K_0 \equiv 2 n_{2,0} = 5.02 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}.$$

Die Größe b hat eine ähnliche Bedeutung wie die optische Weglänge in einem Medium mit von 1 verschiedener Brechungszahl: Die effektive Weglänge b ist diejenige Weglänge, welche ein Elektron, das nicht-kollinear mit einem Photonenbündel der Dichte n_2 kollidiert, in einem kollinear kollidierenden Photontarget der Dichte $n_{2,0}$ zurücklegen müßte, damit es - bei unveränderter Größe des Parameters X - mit derselben Wahrscheinlichkeit gestreut würde. Kollidiert ein Elektron kollinear mit einem Photontarget der Dichte $n_{2,0}$, dann ist b gleich der tatsächlichen Flugstrecke a . Stoßen die Teilchen nicht kollinear

aufeinander, dann trifft ein Elektron bei unveränderter Wegstrecke a infolge der geänderten Relativbewegung auf eine geringere Anzahl von Photonen. Das entspricht einer kürzeren Flugstrecke b in einem kollinear kollidierenden Target. Verringert man die Photonendichte, so ist auch das äquivalent zu einer kürzeren Flugstrecke in einem Target mit unveränderter Dichte.

Mit Hilfe des Begriffes der effektiven Weglänge läßt sich die Abhängigkeit des Compton-Streuprozesses von der Photonendichte, von der Weglänge des Elektrons im Target und vom Einfallswinkel der Laserphotonen unabhängig von den Besonderheiten des Versuchsaufbaus beschreiben. So werden im folgenden im Unterschied zu (6-44) keine Annahmen über den Zusammenhang zwischen der Weglänge a und dem Streuwinkel $\theta = \pi - \theta_{2,L}$ gemacht. Die Photonendichte wird nicht wie in (6-45) durch Leistung und Pulsdauer des Lasers ausgedrückt, sondern als unabhängige Größe behandelt.

6.4.1. Compton-Streuung in Abhängigkeit von der effektiven Weglänge (ohne Vielfachstreuung)

N_0 Elektronen mit der longitudinalen Polarisation $s_0 \equiv s_{||}^{(1)}$ sollen in einem Lasertarget eine Flugstrecke der (effektiven) Länge b durchlaufen. Gesucht ist die Anzahl N der Teilchen, deren Energie beim Verlassen des Targets in einem bestimmten Energieintervall $\rho \dots \rho + d\rho$ liegt. Dabei wird zunächst die vereinfachende Annahme gemacht, daß jedes Elektron höchstens einmal gestreut werden kann.

Man denke sich die Flugstrecke in Stücke der Länge db zerlegt, wobei db so klein zu wählen ist, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Streuprozess längs dieser Strecke klein gegen Eins ist. Die Wahrscheinlichkeit $dW(\rho)$, daß ein Elektron beim Durchlaufen von db in das betrachtete Energieintervall $\rho \dots \rho + d\rho$ gestreut wird, ist dann proportional zum Wirkungsquerschnitt $d\sigma(\rho)$ und proportional zu db .

$$dW(\rho) = d\sigma(\rho) \cdot K_o db \quad (6-55)$$

(vgl. (6-54)) mit

$$d\sigma(\rho) = d\rho \frac{d\sigma_o(\rho)}{d\rho} \{ 1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\rho, X) \}$$

aus (6-31a). Abkürzend kann man hierfür schreiben

$$d\sigma(\rho) \equiv d\sigma_o \{ 1 + s p \} \quad (6-56)$$

mit

$$d\sigma_o \equiv d\rho \cdot d\sigma_o(\rho) / d\rho ,$$

$$p \equiv s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\rho, X) ,$$

$$s \equiv \text{long. Polarisationsgrad des Elektrons.}$$

Die totale Streuwahrscheinlichkeit dW_{tot} beim Durchlaufen von db ist

$$dW_{\text{tot}} = \sigma[0,1] \cdot K_o db, \quad (6-57)$$

mit dem totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma[0,1]$ aus (6-31a). Auch hierfür soll eine Kurzsschreibweise verwendet werden:

$$\sigma[0,1] \equiv \sigma_{\text{tot}} \equiv \sigma_{o,\text{tot}} \{ 1 + s P_{\text{tot}} \} . \quad (6-58)$$

Dabei sind die Abkürzungen

$$\sigma_{o,\text{tot}} \equiv \sigma_o[0,1] ,$$

$$P_{\text{tot}} \equiv s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[0,1] ,$$

$$s \equiv \text{long. Polarisationsgrad des Elektrons}$$

verwendet (vgl. (6-35a) ff). Zahlenwerte für $A_{LL}[0,1]$ – und damit für P_{tot} – lassen sich aus Abb. 6 – 6 an der Stelle $\rho_{min} = 0$ entnehmen.

Mit den Gln. (6-57) und (6-55) kann man angeben, wie sich die Elektronenzahl beim Durchlaufen der Strecke db ändert. Waren nach einer Flugstrecke b von den N_o einlaufenden Elektronen noch

$$N(b) = N_o \cdot v(b) \quad (6-59)$$

Elektronen ungestreut (die Wahrscheinlichkeit $v(b)$, bei b ein ungestreutes Teilchen vorzufinden, wird eingeführt im Hinblick auf die spätere Behandlung von Vielfachstreuung), so verringert sich diese Zahl bei $b + db$ auf

$$N(b + db) = N(b) + dN(b) \quad (6-60)$$

mit

$$\begin{aligned} dN(b) &\equiv N_o \cdot dv(b) = - N(b) dW_{tot} \\ &= - N_o \cdot v(b) \cdot \sigma_{tot} \cdot K_o \cdot db . \end{aligned}$$

Falls die einfallenden Elektronen in einem reinen Helizitätszustand mit Polarisationsgrad $s_o \equiv s_{||}^{(1)} = \pm 1$ sind, kann man die Differentialgleichung (6-60) sofort integrieren:

$$N(b) = N_o \cdot v(b) = N_o \exp [- \sigma_{tot} K_o b] . \quad (6-61a)$$

Die Teilchenzahl nimmt exponentiell ab. Mit (6-58) läßt sich (6-61a) umschreiben:

$$N(b) = N_o \cdot v(b) = N_o \exp [- (1 + s_o P_{tot}) b / r] . \quad (6-61b)$$

Dabei kann

$$r \cong \frac{1}{\sigma_{o, \text{tot}} K_o}, \text{ mit } K_o = 2 n_{2,o} = 5.02 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}, \quad (6-62)$$

als Reaktionslänge oder Reichweite in einem Lasertarget der Dichte $n_{2,o} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ bei kollinear aufeinandertreffenden Teilchen und unpolarisiertem Target bezeichnet werden (vgl. (6-54a) und (6-54b)). Für $X = 0.5 \dots 5$ erhält man Reichweiten von

$$r = 433.5 \text{ } \mu\text{m} \text{ (für } X = 0.5) \dots 1048.5 \text{ } \mu\text{m} \text{ (für } X = 5) \quad (6-63)$$

(vgl. das einleitende Zahlenbeispiel zu Abschnitt 6.4).

Für Zustandsgemische tritt eine Komplikation bei der Lösung der Differentialgleichung (6-60) auf: Der Polarisationsgrad ändert sich beim Durchlaufen der Targetschicht. Damit hängt σ_{tot} auf der rechten Seite von (6-60) von der Flugstrecke b ab. Das zeigt sich klarer, wenn man ein Ensemble aus N Elektronen mit longitudinalem Polarisationsgrad s aus

$$N_+ = N \frac{1 + s}{2} \quad (6-64a)$$

Teilchen mit Helizität $\lambda = +1/2$ und aus

$$N_- = N \frac{1 - s}{2} \quad (6-64b)$$

Teilchen mit Helizität $\lambda = -1/2$ zusammensetzt (vgl. (2-24)). Durch N_+ und N_- ist der longitudinale Polarisationsgrad der Elektronen eindeutig festgelegt:

$$s = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} . \quad (6-65)$$

N_+ und N_- ändern sich unterschiedlich mit b . Nach (6-61b) gilt

$$N_+(b) = N_{o,+} \exp [- (1 + P_{\text{tot}}) b/r] , \quad (6-66a)$$

$$N_-(b) = N_{o,-} \exp [- (1 - P_{\text{tot}}) b/r] . \quad (6-66b)$$

Dabei ist

$$N_{o,\pm} = N_o \frac{1 \pm s_o}{2} ,$$

mit dem longitudinalen Polarisationsgrad s_o des Elektronen - Ensembles vor Eintritt in das Target. Setzt man diese Gleichungen in (6-65) ein, so erhält man den Polarisationsgrad als Funktion von b .

$$s(b) = \frac{s_o \cosh(P_{\text{tot}} b/r) - \sinh(P_{\text{tot}} b/r)}{\cosh(P_{\text{tot}} b/r) - s_o \sinh(P_{\text{tot}} b/r)} . \quad (6-67)$$

Man sieht daran, daß beispielsweise ein ursprünglich unpolarisiertes Teilchenensemble durch Streuung polarisiert wird, falls der totale Wirkungsquerschnitt eine Polarisationsasymmetrie aufweist. Der Grund hierfür ist, daß die reinen Zustände, die den unpolarisierten Zustand zu gleichen Teilen aufbauen, mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit gestreut werden.

Durch Nachrechnen verifiziert man, daß die Funktion (6-67) die Differentialgleichung

$$\frac{d}{db} s(b) = \frac{P_{\text{tot}}}{r} [s(b)^2 - 1] \quad (6-68)$$

erfüllt. Der Polarisationsgrad ändert sich umso schneller, je weniger die Teilchen polarisiert sind.

Nach diesen Überlegungen kann man die Anzahl $dN(b, \rho)$ der Elektronen angeben, die beim Passieren des Wegstückes b in einem zirkular polarisierten Lasertarget ein γ -Quant im Energieintervall $\rho \dots \rho + d\rho$ erzeugen. $dN(b, \rho)$ setzt sich zusammen aus den Beiträgen gestreuten Elektronen positiver und negativer Helizität. Der Anteil von Elektronen positiver Helizität ist gegeben durch die Anzahl

$$N_{o,+} = N_o (1 + s_o) / 2$$

der ursprünglich vorhandenen Teilchen positiver Helizität, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - N_+(b) / N_{o,+} ,$$

daß eines dieser Elektronen beim Durchlaufen der Strecke b gestreut wird und multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{d\sigma_o (1 + p)}{\sigma_{o,\text{tot}} (1 + P_{\text{tot}})} ,$$

daß ein gestreutes Elektronen ein γ -Quant im Energiebereich $\rho \dots \rho + d\rho$ erzeugt. (Der Polarisationsgrad $s_{||}^{(2)}$ der Laserphotonen ist implizit in p und P_{tot} enthalten.) Auf die gleiche Weise bestimmt man den Beitrag der Elektronen negativer Helizität zu $dN(b, \rho)$. Zusammengefaßt ergibt sich der Ausdruck

$$dN(b, \rho) = N_o v(b, \rho) \quad (6-69)$$

$$= N_o \left\{ \frac{1 + s_o}{2} \left(1 - \frac{N_+(b)}{N_{o,+}} \right) \frac{d\sigma_o (1 + p)}{\sigma_{o,tot} (1 + P_{tot})} \right. \\ \left. + \frac{1 - s_o}{2} \left(1 - \frac{N_-(b)}{N_{o,-}} \right) \frac{d\sigma_o (1 - p)}{\sigma_{o,tot} (1 - P_{tot})} \right\}.$$

Die Anzahl

$$N(b, \rho_1, \rho_2; s_{\parallel}^{(2)}) \equiv \int_{\rho_1}^{\rho_2} dN(b, \rho) \quad (6-70a)$$

der in das endliche Energieintervall $\rho_1 \dots \rho_2$ gestreuten hochenergetischen Photonen erhält man aus (6-69) durch die Substitutionen

$$d\sigma_o \rightarrow \sigma_o \equiv \sigma_o[\rho_1, \rho_2]$$

$$p \equiv s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}(\rho, X) \rightarrow P \equiv s_{\parallel}^{(2)} A_{LL}[\rho_1, \rho_2]$$

(vgl. (6-56)), wobei $\sigma_o[\dots]$ in (6-31a) und $A_{LL}[\dots]$ in (6-31c) definiert ist. Einsetzen von (6-66a) und (6-66b) ergibt

$$N(b, \rho_1, \rho_2; s_{\parallel}^{(2)}) = N_o \frac{\sigma_o}{\sigma_{o,tot}} \frac{1}{1 - P_{tot}^2} \quad (6-70b) \\ \times \left\{ (1 - P P_{tot}) f_1(b/r) + (P - P_{tot}) f_2(b/r) \right. \\ \left. + s_o [(P - P_{tot}) f_1(b/r) + (1 - P P_{tot}) f_2(b/r)] \right\}$$

mit den Funktionen

$$f_1(b/r) = 1 - \exp(-b/r) \cosh(P_{tot} b/r), \quad (6-70c)$$

$$f_2(b/r) = \exp(-b/r) \sinh(P_{tot} b/r). \quad (6-70d)$$

Daraus kann man die Polarisationsasymmetrie A_m für den Übergang von Anordnung "A" mit Polarisationsgrad $s_{||}^{(2)}$ der Laserphotonen zu Anordnung "B" mit Polarisationsgrad $-s_{||}^{(2)}$ berechnen:

$$A_m(b) \equiv \frac{N(b, \rho_1, \rho_2; s_{||}^{(2)}) - N(\dots; -s_{||}^{(2)})}{N(b, \rho_1, \rho_2; s_{||}^{(2)}) + N(\dots; -s_{||}^{(2)})} \quad (6-71a)$$

Die Größe $N(\dots; -s_{||}^{(2)})$ erhält man aus (6-70b) durch die Substitutionen $P \rightarrow -P$ und $P_{tot} \rightarrow -P_{tot}$. Einsetzen von (6-70b) und Ausnutzen der Eigenschaft, daß f_1 eine gerade und f_2 eine ungerade Funktion ist, ergibt

$$A_m(b) = s_o \frac{(P - P_{tot}) f_1(b/r) + (1 - P P_{tot}) f_2(b/r)}{(P - P_{tot}) f_2(b/r) + (1 - P P_{tot}) f_1(b/r)} \quad (6-71b)$$

s_o ist wiederum der longitudinale Polarisationsgrad der einfallenden Elektronen; die Analysierstärke P_{tot} ist in (6-58) definiert, die Größe P in der Herleitung von (6-70b) erklärt. Man sieht:

a) Für $b/r \ll 1$ erhält man durch Entwicklung von f_1 und f_2 nach b/r für A_m in niedrigster Ordnung (mit $s_o \equiv s_{||}^{(1)}$)

$$A_m \approx s_o P = s_o s_{||}^{(2)} A_{LL}[\rho_1, \rho_2] \quad (6-72)$$

Man reproduziert das aus (6-47) bekannte Resultat.

b) Der nächsthöhere Term in der Entwicklung von $A_m(b)$ nach Potenzen von b/r zeigt, wie sich die Meßasymmetrie mit zunehmender Weglänge b ändert.

$$A_m \approx s_o P - s_o (P_{tot}/2) \cdot (1 - P^2) \cdot b/r \quad (6-73)$$

Die Meßasymmetrie wird mit Anwachsen der Flugstrecke kleiner, wenn die Analysierstärke P_{tot} des totalen Wirkungsquerschnittes dasselbe Vorzeichen hat wie die Analysierstärke P . Das ist bei Compton-Streuung für $X \lesssim 2$ der Fall (siehe Abb. 6-6). Man kann also erwarten, daß die

Polarisation von Elektronen mittels Compton-Streuung nur dann gemessen werden kann, wenn die Flugstrecke der Elektronen innerhalb des Targets nicht zu groß ist. Genauere Aussagen über die Länge der zulässigen Wegstrecke lassen sich jedoch erst angeben, wenn man Mehrfachstreuung der Elektronen berücksichtigt.

6.4.2. Compton-Streuung in Abhängigkeit von der effektiven Weglänge (mit Vielfachstreuung)

Legt ein Elektron in einem Lasertarget eine Wegstrecke $b \geq r$ zurück, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es nacheinander mit zwei oder mehr Laserphotonen wechselwirkt, nicht mehr vernachlässigbar.

Bei jedem der elementaren Compton-Streuprozesse entsteht bevorzugt ein γ -Quant mit einer Energie von der Größenordnung der Energie des streuenden Elektrons (vgl. Abb. 6-3), falls X groß genug ist. Nach Abschnitt 6.1 (siehe vor allem die Gln. (6-5) und (6-7a)) weichen die Flugrichtungen des gestreuten γ -Quants und des gestreuten Elektrons nur um Winkel der Größenordnung $O(m_1 / E_e)$ von der Impulsrichtung des Elektrons vor dem jeweiligen Elementarereignis ab (E_e bezeichne die Energie des Elektrons unmittelbar vor diesem Streuprozess). Solange das Elektron noch über einige Prozent seiner ursprünglichen Energie $E_{1,L}$ verfügt, liegen die Impulse aller gebildeten γ -Quanten ebenso wie der Impuls des mehrfachgestreuten Elektrons alle noch in einem Kegel mit Öffnungswinkel $O(m_1 / E_{1,L})$, dessen Achse mit der Impulsrichtung des einlaufenden Teilchens zusammenfällt. Für das folgende kann man daher erstens die Richtungsänderung des Elektrons bei Mehrfachstreuung vernachlässigen. Zweitens kann man davon ausgehen, daß die bei Mehrfachstreuung gebildeten harten γ -Quanten vom Detektor nicht getrennt registriert werden können. Sie täuschen ein einzelnen γ -Quant vor, dessen "Energie" aus der Summe der Energien aller gebildeten harten Photonen besteht und mit E_{γ} bezeichnet wird. Mit anderen Worten: E_{γ} ist die von rückgestreuten Photonen im Detektor deponierte Energie.

Die Photonenschauer-Energie E_{γ} kann größer werden als die maximale Energie

$$E_{3,L;\max} = E_{1,L} X / (1 + X)$$

aus Gl. (6-28) für das Photon eines einzigen Compton-Streuprozesses. Wie in den vorangegangenen Abschnitten beziehen wir die Photonenschauer-Energie auf die maximale Energie $E_{3,L;\max}$ und bezeichnen die dimensionlose Energiemaßzahl mit ω :

$$\omega \equiv E_{\gamma} / E_{3,L;\max}.$$

(ω entspricht der früher verwendeten Energievariable ρ aus (6-29). Für Einfachstreuung gilt $\rho = \omega$. Im Unterschied zu ρ kann ω größer als eins werden.) Mit (6-28) und der Variablen X aus (6-27) gilt

$$\omega \equiv \frac{E_{\gamma}}{E_{3,L;\max}} \leq \frac{E_{1,L}}{E_{3,L;\max}} = \frac{1 + X}{X}. \quad (6-74)$$

Analog bezeichnet ϵ die Maßzahl für die Energie E_e des mehrfach-gestreuten Elektrons in Einheiten von $E_{3,L;\max}$:

$$\epsilon \equiv E_e / E_{3,L;\max}. \quad (6-75)$$

ϵ_0 gibt die Energie des ungestreuten Elektrons an ($E_e = E_{1,L}$). Mit (6-74) gilt

$$\epsilon_0 \equiv \frac{E_{1,L}}{E_{3,L;\max}} = \frac{1 + X}{X}. \quad (6-76)$$

Zwischen der Elektronenenergie ϵ und der Photonenschauer-Energie ω besteht der Zusammenhang

$$\epsilon = \epsilon_0 - \omega. \quad (6-77)$$

Vielfachstreuung ohne Polarisation

Die Spinabhängigkeit des Streuprozesses bleibt zunächst ausgeklammert, d.h. die Streuung soll an unpolarisierten Targets erfolgen. Die Wegstrecke sei wieder in Elemente der Länge $db \ll r$ zerlegt. Aus der Änderung der Energieverteilung $v(b, \epsilon)$ der Elektronen beim Durchlaufen einer solchen Schicht,

$$v(b, \epsilon) \rightarrow v(b + db, \epsilon)$$

erhält man durch Integration die Energieverteilung nach der endlichen Wegstrecke b .

Zwischen der Energieverteilung der Elektronen $v(b, \epsilon)$ nach der Flugstrecke b und der Wahrscheinlichkeit $V(b; \epsilon, \epsilon + d\epsilon)$, daß ein Elektron in das Energieintervall $\epsilon \dots \epsilon + d\epsilon$ gestreut wird, besteht der Zusammenhang

$$V(b; \epsilon, \epsilon + d\epsilon) = v(b, \epsilon) d\epsilon. \quad (6-78)$$

$V(b; \epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ ist auch gleich der Wahrscheinlichkeit, daß beim Durchlaufen der Wegstrecke b γ -Quanten mit einer Gesamtenergie im Bereich

$$\epsilon_0 - \epsilon \geq \omega \geq \epsilon_0 - \epsilon - d\epsilon$$

gebildet werden.

Es befinde sich nun nach der Flugstrecke b ein Elektron mit der Wahrscheinlichkeit $v(b, \epsilon') \cdot d\epsilon'$ in dem Energieintervall $\epsilon' \dots \epsilon' + d\epsilon'$. Ein solches Elektron geht mit der Übergangswahrscheinlichkeit

$$U(\epsilon', \epsilon) d\epsilon db = \frac{d\sigma(\epsilon', \epsilon)}{d\epsilon} K_o d\epsilon db \quad (6-79a)$$

durch Compton-Streuung in das Energieintervall $d\epsilon$ um $\epsilon < \epsilon'$ über (vgl. (6-55)). $d\sigma(\epsilon', \epsilon)/d\epsilon$ ist der Wirkungsquerschnitt für diese Streuung. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich nach der Flugstrecke $b+db$ ein Elektron im Energiebereich $\epsilon \dots \epsilon + d\epsilon$ befindet, das bei b die Energie ϵ' hatte, ist damit

$$v(b, \epsilon') d\epsilon' \cdot U(\epsilon', \epsilon) d\epsilon db. \quad (6-79b)$$

Zur Berechnung von $v(b+db, \epsilon)$ müssen die Beiträge aus allen Energieintervallen $\epsilon' \dots \epsilon' + d\epsilon'$, $\epsilon' > \epsilon$, aufsummiert werden. Sie geben den Zuwachs $\Delta v_+(b, \epsilon)$ der Aufenthaltswahrscheinlichkeit für Elektronenenergien in dem Intervall um ϵ beim Fortschreiten von b nach $b+db$ an.

$$\Delta v_+(b, \epsilon) d\epsilon = \sum_{\epsilon' > \epsilon} v(b, \epsilon') d\epsilon' \cdot U(\epsilon', \epsilon) d\epsilon db. \quad (6-80a)$$

Gleichzeitig gehen Elektronen durch Streuung in Intervalle mit niedrigerer Energie verloren:

$$\Delta v_-(b, \epsilon) d\epsilon = v(b, \epsilon) d\epsilon \cdot U_{tot}(\epsilon) db. \quad (6-80b)$$

U_{tot} ist die totale Übergangswahrscheinlichkeit pro Wegeinheit:

$$U_{tot} = \sigma_{tot} \cdot K_o.$$

Für die Berechnung der Energiedichteverteilung beim Übergang von b nach $b+db$ ist es vorteilhaft, die Funktion $v(b, \epsilon)$ getrennt für $\epsilon = \epsilon_o$ (= Energie der Elektronen vor Eintritt in das Lasertarget) und $\epsilon < \epsilon_o$ zu betrachten.

Zunächst zu der Funktion $v(b, \epsilon)$ an der Stelle $\epsilon = \epsilon_0$. Verwendet man ein monoenergetisches Teilchenbündel, so ist $v(b, \epsilon_0)$ δ -Funktions-artig.

$$v(b, \epsilon_0) = \delta(\epsilon_0) \cdot v(b). \quad (6-81)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen nach der Strecke b noch ungestreut ist, erhält man durch Integration von (6-81) über ein schmales Energieintervall um ϵ_0 . Es ist

$$v(b, \epsilon_0) d\epsilon = v(b). \quad (6-82)$$

Da wegen der Energieerhaltung keine Teilchen in dieses Intervall gestreut werden können, ist $v(b)$ von Vielfachstreuereignissen unabhängig. Die Funktion $v(b)$ ist identisch mit der Funktion $v(b)$ aus (6-61b) und somit für alle Werte von b bekannt.

Zur Bestimmung von $v(b + db, \epsilon)$ für $\epsilon \neq \epsilon_0$ zerlegt man wegen der δ -Funktion bei ϵ_0 den Zuwachs Δv_+ aus (6-80a) am besten in einen Anteil $\Delta v_{+,e}$, der von erstgestreuten Elektronen stammt, und in einen Anteil $\Delta v_{+,m}$, den Elektronen beitrugen, die bereits früher einen Teil ihrer Energie verloren haben (Index "m" für mehrfach gestreut). Mit (6-81) erhält man

$$\Delta v_{+,e}(b, \epsilon) d\epsilon = v(b) U(\epsilon_0, \epsilon) d\epsilon db. \quad (6-83)$$

$\Delta v_{+,m}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Delta v_{+,m}(b, \epsilon) d\epsilon &= \sum_{\epsilon < \epsilon' < \epsilon_0} v(b, \epsilon') d\epsilon' \cdot U(\epsilon', \epsilon) d\epsilon db \\ &\equiv \lim_{\delta\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon_0 - \delta\epsilon} v(b, \epsilon') d\epsilon' \cdot U(\epsilon', \epsilon) d\epsilon db, \end{aligned} \quad (6-84)$$

wobei $\delta\epsilon$ eine beliebig kleine positive Größe ist. Durch Streuung geht gleichzeitig ein Teil der Elektronen aus dem Intervall $\epsilon \dots \epsilon + d\epsilon$ verloren.

$$\Delta v_{-}(b, \epsilon) d\epsilon = v(b, \epsilon) d\epsilon \cdot U_{\text{tot}}(\epsilon) db. \quad (6-85)$$

Insgesamt erhält man für $\epsilon < \epsilon_0$

$$v(b+db, \epsilon) = v(b, \epsilon) + \Delta v_{+,e} + \Delta v_{+,m} + \Delta v_{-}. \quad (6-86)$$

Setzt man in (6-86) die Gln. (6-83) bis (6-85) ein, dividiert durch db und führt anschließend den Grenzübergang db gegen Null durch, dann erhält man für $\epsilon < \epsilon_0$ und beliebig kleines $\delta\epsilon$ die Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(b, \epsilon)}{\partial b} = & v(b) U(\epsilon_0, \epsilon) + \lim_{\delta\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon_0 - \delta\epsilon} v(b, \epsilon') U(\epsilon', \epsilon) d\epsilon' \\ & - U_{\text{tot}} v(b, \epsilon), \end{aligned} \quad (6-87)$$

wobei $v(b)$ in (6-61a) angegeben ist:

$$v(b) = \exp(-K_0 \sigma_{o,\text{tot}} b).$$

Die Modifikationen der Energieverteilung infolge von Vielfachstreuung sind sowohl in der Herleitung als auch im Resultat (6-87) leicht zu identifizieren: Sie sind im zweiten und dritten Term auf der rechten Seite von (6-87) enthalten. Vernachlässigt man diese beiden Glieder, so ist die Änderung der Dichteverteilung an der Stelle ϵ allein durch die Wahrscheinlichkeit $v(b)$ bestimmt, daß bei b noch ein ungestreutes Elektron vorhanden ist. In dem Fall wird (6-87) durch die Funktion (6-69) (spezialisiert auf unpolarisierte Streuung) gelöst.

Vielfachstreuung mit Polarisation

Um die Spinabhängigkeit des Streuprozesses zu berücksichtigen, ist die Einführung einer weiteren Verteilungsfunktion erforderlich. Sie wird mit $s(b, \epsilon)$ bezeichnet. Die Funktion $s(b, \epsilon)$ beschreibt den longitu-

dinalen Polarisationsgrad eines Elektronen-Ensembles, das nach Durchqueren der Strecke b mit der Energie ϵ weiterfliegt.

Zur Berechnung von $s(b, \epsilon)$ ist es notwendig, den longitudinalen Polarisationsgrad $L(\epsilon', \epsilon; s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)})$ von Elektronen der Energie ϵ' zu kennen, die bei einfacher Compton-Streuung von Elektronen der Energie ϵ' und der longitudinalen Polarisation $s_{\parallel}^{(1)}$ an zirkular polarisierten Laserphotonen mit Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(2)}$ entstehen. (Man benötigt hier nur die longitudinale Polarisation der Elektronen, weil der Compton-Streuquerschnitt nach Integration über den Azimutwinkel von der transversalen Polarisation unabhängig ist (vgl. (6-26)).)

Wenn die Funktionen $v(b, \epsilon)$ und $s(b, \epsilon)$ bekannt sind, kann man analog zu dem oben beschriebenen unpolarisierten Fall die Funktion $v(b + db, \epsilon)$ berechnen. Wie früher unterteilt man den Energiebereich $0 < \epsilon < \epsilon_0$ in Intervalle der Länge $d\epsilon$. Mit der Wahrscheinlichkeit (6-79b) wird beim Übergang $b \rightarrow b + db$ ein Elektron aus dem Intervall um ϵ' in das Intervall bei ϵ gestreut. Allerdings ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Wegeinheit $U(\epsilon', \epsilon)$ jetzt auch vom longitudinalen Polarisationsgrad $s(b, \epsilon')$ des Elektrons und von der zirkularen Polarisation $s_{\parallel}^{(2)}$ des Photons abhängig, d.h. man hat zu ersetzen

$$U(\epsilon', \epsilon) \rightarrow U(\epsilon', \epsilon; s(b, \epsilon'), s_{\parallel}^{(2)}). \quad (6-88)$$

Mit dieser Modifikation geben die Gln. (6-80a) bzw. (6-80b) weiterhin die Wahrscheinlichkeit an, daß ein Elektron in das Intervall um ϵ hinein, bzw. aus diesem Intervall heraus gestreut wird. Damit bleibt auch (6-87) gültig.

Auch zur Berechnung von $s(b + db, \epsilon)$ wird ein Energieintervall um ϵ herausgegriffen und näher betrachtet. Den Polarisationsgrad von Elektronen, die beim Durchqueren der Strecke db von b nach $b + db$ aus dem Intervall um ϵ' in das Intervall um ϵ gestreut werden, gibt die Funktion $L(\epsilon', \epsilon; s(b, \epsilon'), s_{\parallel}^{(2)})$ an. Der Polarisationsgrad der in dem Intervall bei ϵ verbleibenden Teilchen ändert sich gemäß der Differentialgleichung (6-68). Die Gesamtheit der Elektronen in dem Intervall $\epsilon \dots \epsilon + d\epsilon$ (an der Stelle $b + db$) bildet ein statistisches Gemisch, dessen

Polarisationszustand man durch Addition der mit statistischen Gewichten g versehenen Polarisationsgrade der einzelnen Konstituenten erhält (vgl. (2-24)). Der Gewichtungsfaktor g ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen auf eine bestimmte Art in das Energieintervall gelangt, dividiert durch die gesamte Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Elektron in diesem Intervall befindet. Der Gewichtungsfaktor für Teilchen aus dem Intervall um ϵ' ist (vgl. (6-72))

$$g(\epsilon', \epsilon) = \frac{v(b, \epsilon') d\epsilon' \cdot U(\epsilon', \epsilon; s(b, \epsilon'), s_{\parallel}^{(2)}) db d\epsilon}{v(b + db, \epsilon) d\epsilon} \quad (6-89)$$

Für Teilchen, die in dem Intervall bleiben, bestimmt man $g(\epsilon)$ mit (6-80b) zu

$$g(\epsilon) = \frac{v(b, \epsilon) d\epsilon \{ 1 - U_{\text{tot}}(\epsilon; s(b, \epsilon)) db \}}{v(b + db, \epsilon) d\epsilon} \quad (6-90)$$

Man erhält

$$s(b + db, \epsilon) = g(\epsilon) \left[s(b, \epsilon) + P_{\text{tot}}(\epsilon) [s^2(b, \epsilon) - 1] db / r(\epsilon) \right] + \sum_{\epsilon < \epsilon' \leq \epsilon_0} g(\epsilon', \epsilon) L(\epsilon', \epsilon; s(b, \epsilon'), s_{\parallel}^{(2)}) \quad (6-91)$$

Dabei ist $P_{\text{tot}}(\epsilon)$ die Analysierstärke des Compton-Effektes bei der Energie ϵ (vgl. (6-58)) und $r(\epsilon)$ die zugehörige Reichweite aus (6-62).

Auch hier ist es nützlich, Beiträge von Einfach- und Mehrfachstreuung getrennt zu behandeln.

Auf den Polarisationsgrad $s(b, \epsilon_0)$ der ungestreuten Elektronen haben Vielfachstreuereignisse keinen Einfluß. Daher ist $s(b, \epsilon_0)$ gleich dem Polarisationsgrad $s(b)$ aus (6-67) für die ungestreuten Elektronen ohne Berücksichtigung von Vielfachstreuung:

$$s(b, \epsilon_0) = s(b). \quad (6-92)$$

Den Polarisationsgrad $s(b + db, \epsilon)$ der gestreuten Elektronen mit $\epsilon < \epsilon_0$ erhält man aus (6-91) mit (6-89) und (6-90). Mit der expliziten Gestalt von $v(b, \epsilon_0)$ aus (6-81) und nach Division durch db mit anschließendem Grenzübergang $db \rightarrow 0$ gelangt man zu der Integro-Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial b} [s(b, \epsilon) v(b, \epsilon)] \quad (6-93)$$

$$= v(b, \epsilon) P_{\text{tot}}(\epsilon) [s^2(b, \epsilon) - 1] / r(\epsilon) \\ - U_{\text{tot}}(\epsilon) v(b, \epsilon) s(b, \epsilon) \\ + U(\epsilon_0, \epsilon; s(b)) L(\epsilon_0, \epsilon; s(b)) v(b) \\ + \lim_{\delta \epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon_0 - \delta \epsilon} U(\epsilon', \epsilon; s(b, \epsilon')) L(\epsilon', \epsilon; s(b, \epsilon')) v(b, \epsilon') d\epsilon'.$$

Die Summe aus (6-91) ist durch ein Integral ersetzt. (Die linke Seite von (6-93) kann man mit Hilfe der Kettenregel und mit (6-87) so umformen, daß sie nur die partielle Ableitung der Funktion $s(b, \epsilon)$ enthält.)

Die Integro-Differentialgleichungen (6-87) und (6-93) enthalten die bekannten Funktionen $v(b)$ aus (6-61b) und $s(b)$ aus (6-67). Die Evolution von $v(b, \epsilon)$ und (b, ϵ) mit fortschreitender Flugstrecke b wird durch die Übergangsfunktionen $U(\epsilon', \epsilon; s)$ und $U_{\text{tot}}(\epsilon')$ sowie durch die Polarisationsfunktion $L(\epsilon', \epsilon; s)$ bestimmt. Die drei Funktionen erhält man aus dem Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung. Sie werden im folgenden angegeben.

Die Übergangsfunktionen U und U_{tot}

$U(\epsilon', \epsilon; s(b))$ ist nach (6-79a) proportional zum differentiellen Wirkungsquerschnitt.

$$U(\epsilon', \epsilon; s) = \frac{d\sigma(\epsilon', \epsilon; s)}{d\epsilon} K_0 \quad (6-94)$$

mit dem Faktor K_0 aus (6-54b). Der Streuquerschnitt $d\sigma/d\epsilon$ für das Entstehen eines Elektrons der Energie ϵ bei Compton-Streuung eines Elektrons der Energie ϵ' an einem Laserphoton ist gleich dem Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\omega$ für die Bildung eines γ -Quants der Energie $\omega = \epsilon' - \epsilon$. Die Funktion $d\sigma/d\omega$ kann man aus (6-31a) erhalten. Es bleibt der Zusammenhang zwischen $d\omega$ und $d\rho$ zu bestimmen und der Parameter $X(\epsilon')$ für die Energie ϵ' anzugeben.

Nach (6-27) kann man $X(\epsilon')$ für ein Elektron der Energie $(\epsilon'/\epsilon_0) \times E_{1,L}$ ausdrücken durch

$$X(\epsilon') = \frac{\epsilon'}{\epsilon_0} X = \epsilon' \frac{X^2}{1 + X}, \quad (6-95)$$

wobei $X \equiv X(\epsilon_0)$ der kinematische Parameter für das einfallende Elektron ist. (Die zweite Beziehung in (6-95) folgt mit Gl. (6-76) für ϵ_0 .) Das Verhältnis ρ aus (6-29) aus Photonenenergie $\epsilon' - \epsilon$ und maximaler Photonenenergie $\epsilon' X(\epsilon') / (1 + X(\epsilon'))$ (vgl. (6-28)) ist eine von ϵ' und ϵ abhängige Funktion. Unter Verwendung von (6-95) erhält man

$$\rho(\epsilon', \epsilon) = \frac{\epsilon' - \epsilon}{\epsilon'} \frac{1 + X + \epsilon' X^2}{\epsilon' X^2}. \quad (6-96)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich der Zusammenhang zwischen $d\sigma(\rho, X)/d\rho$ aus (6-31a) und $d\sigma/d\epsilon$ angeben:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\epsilon', \epsilon; s)}{d\epsilon} &= \frac{d\sigma}{d\rho} \left| \frac{d\rho}{d\epsilon} \right| \\ &= \frac{d\sigma(\rho(\epsilon', \epsilon), X(\epsilon'))}{d\rho} \cdot \frac{1 + X + \epsilon' X^2}{\epsilon' X^2} \end{aligned} \quad (6-97)$$

Analog zu (6-94) erhält man für die Funktion U_{tot} die Gleichung

$$U_{\text{tot}}(\epsilon; s) = \sigma_{\text{tot}}(\epsilon; s) \cdot K_0. \quad (6-98)$$

$\sigma_{\text{tot}}(\epsilon; s)$ ist der von $X(\epsilon')$ aus (6-95) abhängige totale Wirkungsquerschnitt. (Numerische Werte für den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $\sigma_{0,\text{tot}}$ können aus Abb. 6-5 an der Stelle $\rho=0$ entnommen werden. Die Polarisationsasymmetrie des totalen Wirkungsquerschnittes ist aus Abb. 6-6 abzulesen.)

Der longitudinale Polarisationsgrad L

Compton-gestreuter Elektronen

Die Funktion $L(\epsilon', \epsilon; s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)})$ gibt den Grad der longitudinalen Polarisation an, den Elektronen durch Compton-Streuung an zirkular polarisierten Laserphotonen mit Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(2)}$ erhalten. ϵ_0 ist die Energie, $s_{\parallel}^{(1)}$ der longitudinale Polarisationsgrad der Elektronen vor der Streuung; ϵ bezeichnet die Energie der gestreuten Elektronen. (Der spezielle Wert ϵ_0 für die Energie der Elektronen vor dem Stoß vereinfacht die Schreibweise, denn es ist $X(\epsilon_0) \equiv X$.) Den experimentellen Bedingungen entsprechend wird über die Polarisation der rückgestreuten γ -Quanten summiert.

Den Polarisationsgrad L kann man mit Formeln aus Kapitel 2 durch Helizitätsamplituden ausdrücken. Für den vorliegenden Fall ist die Spin-Dichtematrix

$$\rho(\text{El.}) \equiv \rho(\text{El.} - \text{Strahl; } \gamma\text{-Quant unpol.})$$

der gestreuten Elektronen Gl. (2-137) zu entnehmen. (Die Teilchen A, B, a_1 und b_1 in (2-137) entsprechen der Reihe nach dem Elektron vor dem Stoß, dem Laserphoton, dem gestreuten Elektron und dem rückgestreuten γ -Quant.) Zusammen mit (2-45) für die Gestalt der Dichtematrix erhält man für L den Ausdruck

$$L(\epsilon_o, \epsilon; s_{||}^{(1)}, s_{||}^{(2)}) = \rho(\text{El.})_{+1/2, +1/2} - \rho(\text{El.})_{-1/2, -1/2} \quad (6-99)$$

Die longitudinale Polarisierung L aus (6-99) ist auf das lokale Koordinatensystem (LKS) der gestreuten Elektronen bezogen. Man kann die Impulsabhängigkeit der Orientierung des LKS jedoch vernachlässigen und L als Polarisationsgrad im LKS des einfallenden Elektrons auffassen ($\hat{p} = \{\theta_{1,L} = 0, \phi_{1,L} = 0\}$). Der Grund hierfür ist der kleine Streuwinkel $\theta_{4,L}$ der Elektronen im Laborsystem ($\theta_{4,L} = O(m_1/E_{1,L})$) und die Tatsache, daß die LKSe im Bereich kleiner Polarwinkel stetig auseinander hervorgehen. Deshalb ändern sich die Polarisationsparameter nur sehr wenig, wenn man sie auf ein benachbartes LKS bezieht.

Nach Kap. 6.1.3 kann man sich bei der Berechnung von L auf den Fall kollinear einfallender Laserphotonen beschränken. (Zur Erinnerung: Die Erzeugung harter γ -Quanten bei der Compton-Streuung an schräg einfallenden Laserphotonen kann in guter Näherung durch ein kollinear einfallendes Photon der Energie $\tilde{E}_{2,L}$ aus (6-12) beschrieben werden.)

Die Helizitätsamplituden für Compton-Streuung im Laborsystem bei kollinear kollidierenden Teilchen können mit Hilfe eines in SCHOON-SCHIP geschriebenen Computerprogrammes [44], das auf dem Helizitätsformalismus von Anders und Jachmann [16] basiert, analytisch berechnet werden. Die in den Dichtematrix-Elementen in Gl. (6-99) enthaltenen Summen über Produkte von Helizitätsamplituden (vgl. (2-137)) lassen sich mit Hilfe des selben Programmes analytisch ermitteln und weiterverarbeiten. Auf diese Weise werden in dem exakten Ausdruck für L Zähler und Nenner nach Potenzen von $1/\gamma_{1,L}$ entwickelt: Dazu drückt man die Winkel der gestreuten Teilchen über

die Energie-Impuls-Bilanz durch den Winkel $\Theta_{3,L}$ aus, der die Flugrichtung des rückgestreuten Photons beschreibt; für den sehr kleinen Winkel $\Theta_{3,L}$ verwendet man die reduzierte Winkelvariable $y \equiv \Theta_{3,L} \gamma_{1,L}$ (vgl. (6-5)); die bei der Berechnung der Helizitätsamplituden entstehenden Winkelfunktionen stellt man durch die ersten Glieder einer Potenzreihe dar. Ordnen des Resultates nach Potenzen von $1/\gamma_{1,L}$ ergibt schließlich

$$L(\epsilon_0, \epsilon; s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) = \frac{s_{\parallel}^{(1)} (B - C) + (s_{\parallel}^{(1)} - s_{\parallel}^{(2)}) D + (s_{\parallel}^{(1)} + s_{\parallel}^{(2)}) y^4 D + O(1/\gamma_{1,L})}{B + C + (1 - s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)}) D + (1 + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)}) y^4 D + O(1/\gamma_{1,L})} \quad (6-100a)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad B &\equiv X^4 (1 + 2 y^2 + 2 y^4 + 2 y^6 + y^8), \\ C &\equiv X^6 y^2, \\ D &\equiv X^5 (1 + y^2) + X^6 / 2. \end{aligned}$$

X ist der kinematische Faktor aus (6-27). Die Größen X und y lassen sich durch die Energien der ungestreuten (ϵ_0) und der gestreuten (ϵ) Elektronen (alle Energien nach (6-75) in Einheiten der maximalen Energie der rückgestreuten Laserphotonen) ausdrücken. Nach (6-76) gilt

$$X = \frac{1}{\epsilon_0 - 1}. \quad (6-100b)$$

Die Energie ϵ des auslaufenden Elektrons ist gleich der Energie ϵ_0 , vermindert um die Energie ρ des rückgestreuten γ -Quants. Mit (6-29) erhält man

$$y^2 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon - \epsilon_0} \frac{\epsilon + 1 - \epsilon_0}{1 - \epsilon_0} \quad (6-100c)$$

Die eben beschriebene getrennte Entwicklung von Zähler und Nenner ist unproblematisch, solange der Nenner nicht verschwindet. Da die Größen B, C, D und ihre Vorfaktoren ausnahmslos größer oder gleich Null sind, kann der Nenner nur dann Null werden, wenn gleichzeitig $y \approx 0$ und $X^4 \approx 1/\gamma_{1,L}$ ist, d.h. für $X \leq 0.1$. In dem (hier betrachteten) Bereich $0.5 < X < 5$ ist (6-100a) daher eine gute Näherung.

Gl. (6-100a) lassen sich folgende Aussagen entnehmen:

a) Der Polarisationsgrad sehr schwach gestreuter Elektronen bleibt, wie zu erwarten ist, unverändert. In diesem Fall geht $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, d.h. y ist sehr viel größer als Eins. Der Term B überwiegt wegen des Summanden mit der Potenz y^8 . Daraus folgt die Behauptung

$$L \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} s_{\parallel}^{(1)} \quad (6-101)$$

b) Gibt ein Elektron die größtmögliche Energie an das Laserphoton ab, d.h. ist $y = 0$, so gilt für den Polarisationsgrad des gestreuten Elektrons

$$L \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \epsilon_{\min}} \frac{s_{\parallel}^{(1)} + (s_{\parallel}^{(1)} - s_{\parallel}^{(2)}) (X + X^2/2)}{1 + (1 - s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)}) (X + X^2/2)} \quad (6-102)$$

Dabei ist $\epsilon_{\min} = \epsilon_0 - 1$. Man sieht, daß beispielsweise ein unpolarisiertes Elektron durch Streuung an zirkular polarisierten Laserphotonen longitudinal polarisiert wird. Der Polarisationsgrad beträgt in dem Fall

$$L \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \epsilon_{\min}} -s_{\parallel}^{(2)} \frac{X(1 + X/2)}{1 + X(1 + X/2)} \quad (6-103)$$

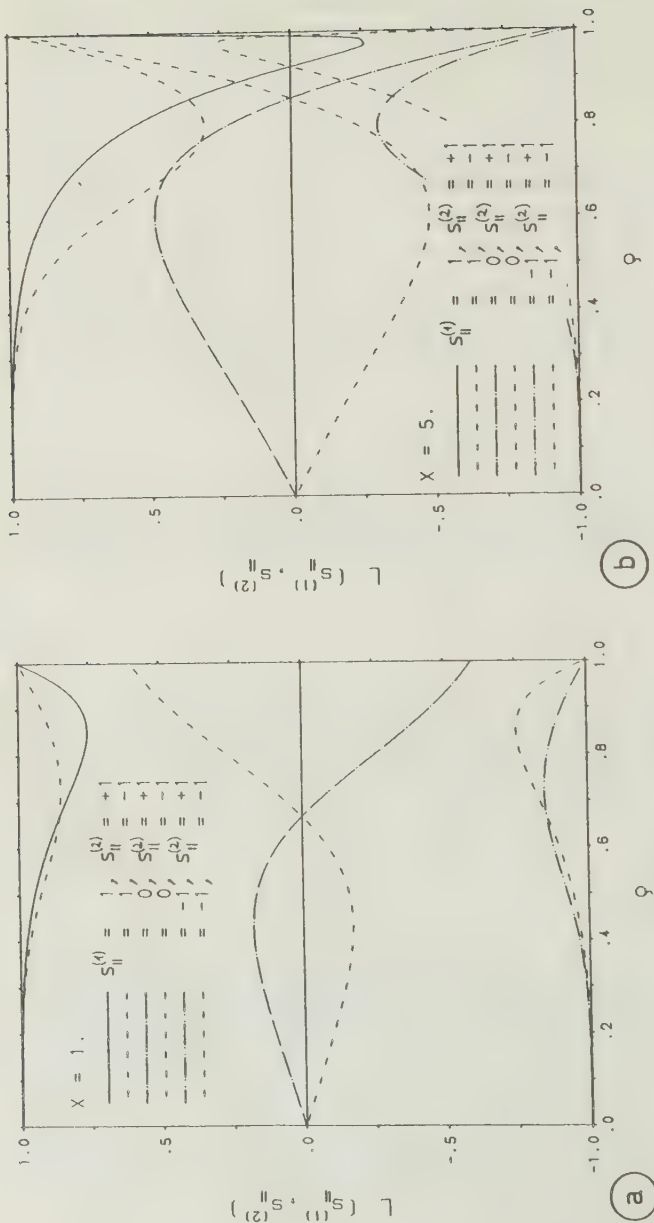


Abb. 6-9 a, b : Longitudinaler Polarisationsgrad L der Compton-gestreuten Elektronen in Abhängigkeit von der Energie ρ (s. (6-29)) der rückgestreuten γ -Quanten. Es ist $s_{||}^{(1)}$ die longitudinale Polarisierung der einfallenden Elektronen und $s_{||}^{(2)}$ der zirkulare Polarisationsgrad der ungestreuten Photonen. Die Fälle $X=1$ (Abb. a) und $X=5$ (Abb. b) (Definition von X siehe (6-27)) sind betrachtet. Für $\rho \rightarrow 0$ geht $L \rightarrow s_{||}^{(1)}$ (unabhängig von $s_{||}^{(2)}$).

Die Funktion L findet man für die Parameterwerte $X = 1$ in Abb. 6-9a und $X = 5$ in Abb. 6-9b als Funktion der Energie $\rho = \epsilon_0 - \epsilon$ der gestreuten Photonen für verschiedene Kombinationen der Polarisierungen $s_{\parallel}^{(1)}$ und $s_{\parallel}^{(2)}$ der einlaufenden Teilchen aufgetragen. Der Funktionsverlauf für $\rho \rightarrow 0$ bestätigt, daß der Polarisationsgrad schwach gestreuter Elektronen stetig in den Polarisationsgrad der ungestreuten Elektronen übergeht (vgl. (6-101)). Erst die Bildung harter γ -Quanten beeinflusst die Polarisation der gestreuten Leptonen. Für $X = 1$ unterscheidet sich L jedoch nur schwach von der Polarisation ungestreuter Elektronen. Für $X = 5$ sind die Polarisierungseffekte größer. Sie machen sich vor allem im Bereich $\rho \approx 1$ bemerkbar.

Der Polarisationsgrad Compton-gestreuter Elektronen für den Fall unpolarisierter einfallender Photonen wurde von Lipps und Tolhoek [62] im Ruhssystem der Elektronen angegeben. Wegen der mit dem Übergang vom Ruhssystem zum Laborsystem verbundenen Wigner-Transformation (vgl. Anhang B) ist es jedoch schwierig, Gl. (6-100a) für diesen Spezialfall mit dem Resultat aus [62] zu vergleichen. Die Übereinstimmung in den Grenzfällen $\rho \rightarrow 0$ (Gl. (6-101)) und $\rho \rightarrow 1$ (Gl. (6-102)) - sie entsprechen den Streuwinkeln $\cos\theta = 1$ und $\cos\theta = -1$ in der Arbeit [62] - kann man jedoch direkt durch Vergleich mit Fig. 2 der Arbeit von Lipps und Tolhoek entnehmen.

Numerisch ermittelte Resultate unter

Berücksichtigung von Vielfachstreuung

Nach dem Einschub über den Polarisationsgrad Compton-gestreuter Elektronen kann man die Verteilungsfunktion $v(b, \epsilon)$ für die Energie gestreuter Elektronen berechnen.

Zunächst stellt man fest, daß $v(b, \epsilon)$ (wie früher das Energiespektrum der γ -Quanten bei einfacher Compton-Streuung) als einzigen Parameter (neben den Polarisationsparametern der einfallenden Teilchen) die Größe X aus (6-27) enthält. Beweis: Betrachtet man die Integro-Differential-

gleichungen (6-87) und (6-92) sowie die Funktionen U , U_{tot} und L , so sieht man, daß nur die Parameter X und ϵ_0 auftreten; da alle Energien in Einheiten von $E_{3,L;\text{max}}$ ausgedrückt werden, ist die Energie ϵ_0 der einlaufenden Elektronen ihrerseits nach (6-76) durch den Parameter X festgelegt.

Im folgenden wird nur der Fall $X = 1$ diskutiert. Das ist ausreichend, um charakteristische Auswirkungen von Vielfachstreuung zu erkennen.

Abb. 6 – 10 zeigt qualitativ das Energiespektrum $v(b, \epsilon)$ der gestreuten Elektronen sowie das zugehörige Spektrum $u(b, \omega)$ der von rückgestreuten Photonen im Detektor deponierten Energie ω . Für $\epsilon \neq \epsilon_0$ (es ist $\epsilon_0 = 2$ für $X = 1$) gilt

$$u(b, \omega) = v(b, \epsilon = \epsilon_0 - \omega), \quad (6-104)$$

denn der Vorgang, daß ein Photonenschauer der Energie $\omega \dots \omega + d\omega$ emittiert wird, ist gerade dadurch gekennzeichnet, daß ein Elektron in das Energieintervall $\epsilon \dots \epsilon - d\omega$, mit $\epsilon = \epsilon_0 - \omega$, gestreut wird. Die δ -Funktion der Spektralverteilung $v(b, \epsilon)$ an der Stelle $\epsilon = \epsilon_0$ überträgt sich nicht auf die Funktion $u(b, \omega)$.

In Spalte 1 von Abb. 6 – 10 ist das δ -artige Energiespektrum der einfallenden Elektronen ($b = 0$) aufgezeichnet. Spalte 2 enthält das Energiespektrum der Elektronen nach Durchlaufen der Wegstrecke $b \approx r$, wobei unter a) nur Einfachstreuung und unter b) auch Vielfachstreuung berücksichtigt ist. In beiden Fällen ist $v(b, \epsilon_0)$ durch Streuung auf ungefähr $1/e$ des ursprünglichen Wertes abgefallen (vgl. (6-61b)). Bei Einfachstreuung entstehen Elektronen im Energiebereich $\epsilon = 1 \dots 2$ ($X = 1$ gesetzt). Durch Vielfachstreuung breitet sich das Energiespektrum in den Bereich $\epsilon < 1$ aus. Dementsprechend wird, wie in Spalte 3 skizziert, bei Einfachstreuung von den Photonen im Detektor eine Energie ω (=Energie ρ der rückgestreuten Photonen) im Bereich $0 < \omega = \rho < 1$ deponiert. Bei Vielfachstreuung ist das Energiespektrum der Photonen zu höheren Energien hin ausgeschmiert.

Die Funktion $u(b, \rho)$ für Einfachstreuung und $b \ll r$ stimmt mit dem Energiespektrum aus Abb. 6-2 bis auf die Normierung überein:

$$\frac{d\sigma}{d\rho} \rightarrow u(b, \omega=\rho) = \frac{d\sigma}{d\rho} K_0 b.$$

Für $b \geq r$ treten jedoch bereits bei Einfachstreuung Modifikationen gegenüber dem Funktionsverlauf aus Abb. 6-2 auf, die mit der Polarisationsabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes und der damit verbundenen unterschiedlichen Streuwahrscheinlichkeit von Zuständen positiver und negativer Helizität zusammenhängen (siehe Gl. (6-70b)).

In den Abbn. 6-11a und 6-11b sind numerisch berechnete Energiespektren $u(b, \omega)$ unter Einbeziehung von Vielfachstreuung für die Targetdicken $b = 0.2 r$, r und $5 r$ graphisch wiedergegeben. Dabei beträgt die Reichweite r nach (6-62) für $X = 1$

$$r (X = 1) = 532 \mu\text{m}. \quad (6-105)$$

In beiden Abbildungen hat das einlaufende Elektron die longitudinale Polarisation $s_{\parallel}^{(1)} = +1$. Abb. 6-11a beschreibt die Streuung an zirkular polarisierten Photonen mit Polarisationsgrad $s_{\parallel}^{(2)} = +1$; Abb. 6-11b gibt die Verhältnisse für $s_{\parallel}^{(2)} = -1$ wieder. Zum Vergleich sind jeweils die ohne Vielfachstreuung ermittelten Energiespektren aus (6-70b) in die Diagramme eingetragen (gestrichelte Linien).

Man sieht, daß für $b = 0.2 r$ die Modifikation durch Vielfachstreuung noch sehr gering ist. Für $b = r$ wird sie deutlicher spürbar und für $b = 5 r$ hat sich das Energiespektrum vollständig verändert. Mit Anwachsen der Wegstrecke b wird das mit Vielfachstreuung berechnete Spektrum der deponierten Gesamtenergie gegenüber dem ohne Vielfachstreuung ermittelten immer weiter zu größeren Werten von ω hin verschoben. Das ist verständlich, da die zusätzlich erzeugten γ -Quanten die insgesamt an Photonen abgegebene Energie erhöhen.

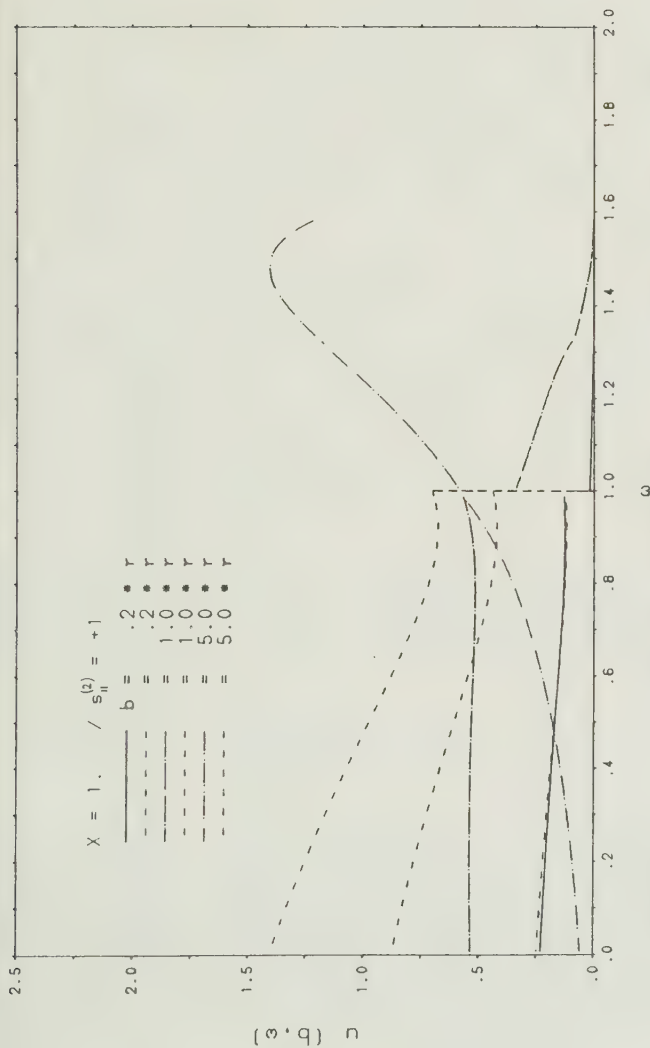


Abb. 6-11a: Spektrum $u(b, \omega)$ der von Compton-gestreuten Photonen im Detektor deponierten Gesamtenergie ω für verschiedene effektive Flugstrecken b (siehe (6-54a)) in einem Photonentarget der Dichte $n_{2,0} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$. Die gestrichelt eingetragenen Kurven sind ohne Vielfachstreuung berechnet. Sie enden bei $\omega = 1$. Es ist $X = 1$ (vgl. (6-27)), $r = 532 \text{ } \mu\text{m}$, $s_{||}^{(1)} = +1$ und $s_{||}^{(2)} = +1$ vorausgesetzt.

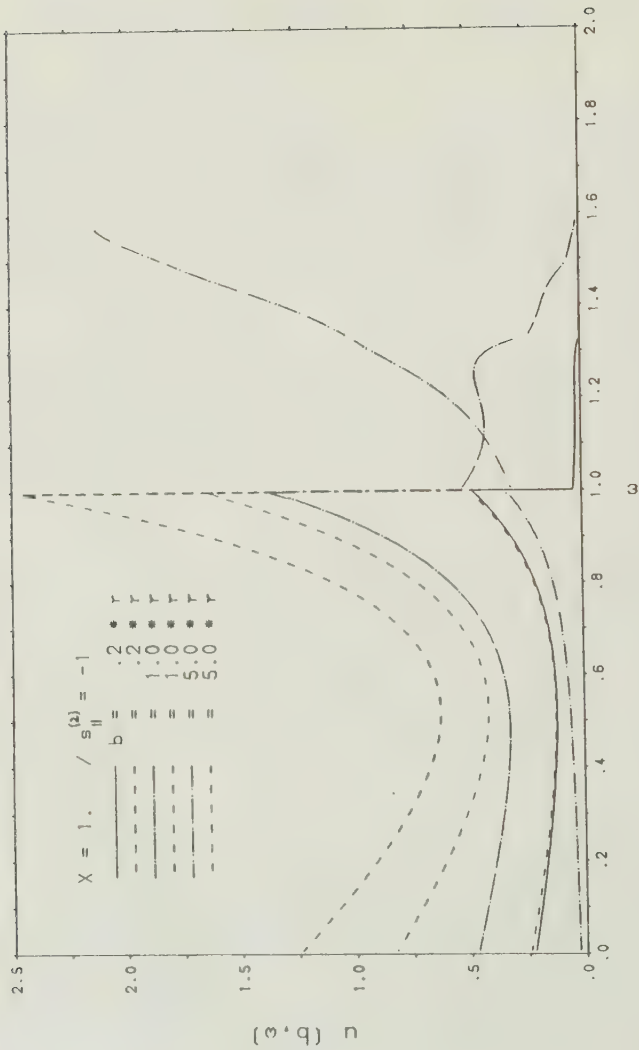


Abb. 6-11b : Beschreibung siehe Abb. 6-11a. Der einzige Unterschied besteht in der zirkularen Polarisation der Photonen: Es ist $s_{||}^{(2)} = -1$.

Auffällig in Abb. 6 - 11b ist der wellenförmige Verlauf von $u(b=r, \omega)$ im Bereich $\omega > 1$. Er wird verursacht von der Gestalt des Photonenpektrums für einfache Compton-Streuung. Dieses steigt für $s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} = -1$ am hochenergetischen Ende ($\rho \rightarrow 1$) stark an (vgl. die Abb. 6 - 3a bis 6 - 3d). In dem hier betrachteten Fall ($X = 1$, $\epsilon_0 = 2$) entstehen bei der ersten Streuung eines Elektrons daher bevorzugt Photonen mit der Energie $\omega' = \epsilon_0 X / (1 + X) = 1$ und gestreute Elektronen der Energie $\epsilon' = 1$. Der kinematische Parameter $X' = X(\epsilon')$ für Compton-Streuung von Elektronen dieser Energie ist $X' = X / 2 = 1 / 2$ (vgl. (6-27)). Bei der zweiten Streuung werden daher bevorzugt Photonen der Energie $\omega'' = \epsilon' X' / (1 + X') = 1 / 3$ gebildet. Durch Aufsummation der Photonenenergien ω' und ω'' aus dem ersten und zweiten Streuprozess entsteht der Peak in der Energieverteilung in der Umgebung von $\omega = 1.33$. Die Überlegungen lassen sich auf analoge Weise fortsetzen: Die zu ω'' gehörigen zweifach gestreuten Elektronen haben eine Energie von $\epsilon'' = 2 / 3$; die dritte Streuung wird von $X'' = X(\epsilon'') = 1 / 3$ beschrieben; es entstehen Photonen mit der Energie $\omega''' = 1 / 6$; der nächste (nur noch andeutungsweise erkennbare) Peak in $u(b, \omega)$ erscheint bei $\omega = 1.5$.

Ein Vergleich von Abb. 6 - 11a mit 6 - 11b zeigt die Abhängigkeit des Energiespektrums von der zirkularen Polarisierung der Laserphotonen. In Abb. 6 - 12 ist die differentielle Zählraten-Asymmetrie $A_m(b, \omega)$,

$$A_m(b, \omega) = \frac{u(b, \omega; s_{\parallel}^{(1)} = 1, s_{\parallel}^{(2)} = 1) - u(b, \omega; 1, -1)}{u(b, \omega; s_{\parallel}^{(1)} = 1, s_{\parallel}^{(2)} = 1) + u(b, \omega; 1, -1)} \quad (6-106)$$

(vgl. (2-104)), die beim Umklappen der zirkularen Polarisierung des Laserlichtes entsteht, als Funktion von ω aufgetragen. Der Polarisationsgrad der einfallenden Elektronen ist $s_{\parallel}^{(1)} = 1$. Als Parameter werden die Werte $b = 0.2 r$, r und $5 r$ für die Flugstrecke verwendet. Zum Vergleich sind die ohne Vielfachstreuung berechneten Asymmetrien gestrichelt in Abb. 6 - 12 eingezeichnet. Sie sind mit Hilfe von (6-71b) ermittelt.

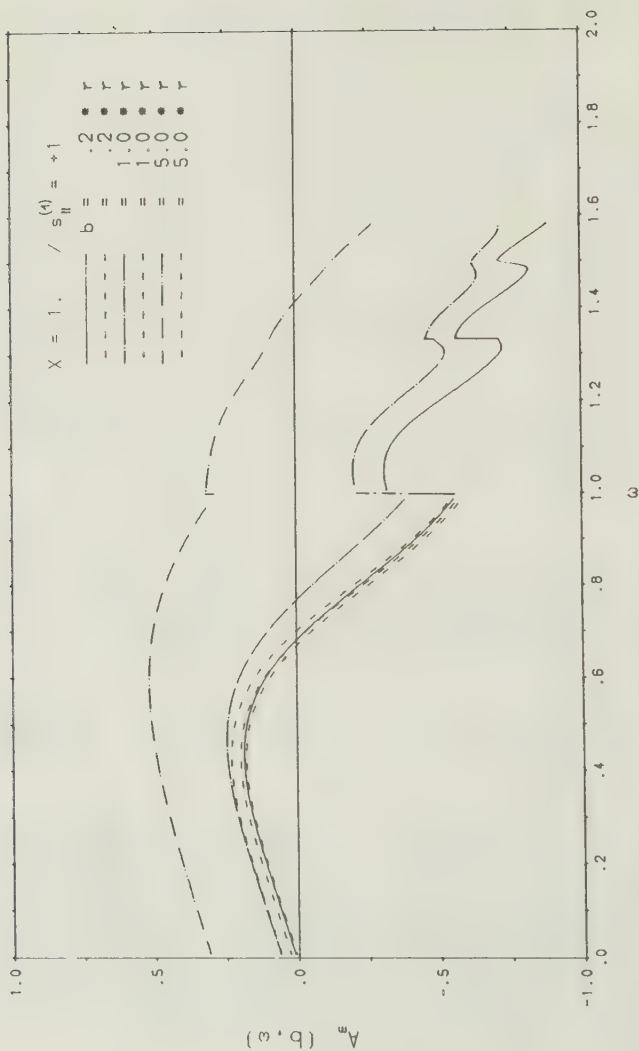


Abb. 6 - 12 : Differentielle Zählratenasymmetrie $A_m(b, \omega)$ (Def. s. (6-106)) beim Umkappen der Photonenpolarisation von $s_{\parallel}^{(2)} = +1$ nach $s_{\parallel}^{(2)} = -1$ in Abhängigkeit von der im Detektor deponierten Photonenenergie ω für verschiedene effektive Targetdicken b (vgl. (6-54a), vorausgesetzte Photonenendichte $n_{z,0} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$). Es ist $X = 1, r = 532 \text{ } \mu\text{m}$ und $s_{\parallel}^{(1)} = +1$.

Man stellt fest, daß die gestrichelten Vergleichsfunktionen nahezu unabhängig von der Weglänge b sind. Das liegt an der kleinen Analysierstärke P_{tot} des totalen Wirkungsquerschnittes (vgl. (6-71b)). Demgegenüber hängt die mit Vielfachstreuung berechnete Asymmetrie A_m deutlich von b ab. Im Zusammenhang mit der in Abschnitt 6.3 diskutierten Anordnung zur Polarisationsmessung, bei der die Polarisationsasymmetrie im Intervall $0.6 < \omega < 1$ ausgenützt wird, ist vor allem bemerkenswert, daß eine längere Flugstrecke b zu einer Abnahme und schließlich zu einem Vorzeichenwechsel der Meßasymmetrie führt. Man kann b also nicht bedenkenlos erhöhen, um dadurch die Ereignisrate zu verbessern.

Die im Zusammenhang mit Abb. 6-11b diskutierten Peaks für $b \approx (0.2 \dots 1) \times r$ an den Stellen $\omega = 1.33, 1.5, \text{etc.}$ treten im Funktionsverlauf der differentiellen Zählratenasymmetrie in Abb. 6-12 in besonders ausgeprägter Form wieder auf.

In den Abbn. 6-13a und 6-13b sind die über das Intervall $\omega_{\text{min}} = 0.6, 0.7$ bzw. 0.8 bis $\omega_{\text{max}} = 1$ integrierten Energiespektren aus den Abbn. 6-11a und 6-11b als Funktion von b aufgetragen. (Die gewählten Energieintervalle stimmen mit denen aus Tab. 6-5 überein.) Es ist

$$n(b, \omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}; s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) \equiv \int_{\omega_{\text{min}}}^{\omega_{\text{max}}} u(b, \omega; s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)}) d\omega. \quad (6-107)$$

In beiden Abbildungen ist das einlaufende Elektron als vollständig longitudinal polarisiert vorausgesetzt ($s_{\parallel}^{(1)} = +1$). Der zirkulare Polarisationsgrad des Laserphotons beträgt $s_{\parallel}^{(2)} = +1$ in Abb. 6-13a und $s_{\parallel}^{(2)} = -1$ in Abb. 6-13b. Im Gegensatz zu den gestrichelt eingezeichneten Kurven für Einfachstreuung nimmt die Wahrscheinlichkeit, daß Photonen mit einer Gesamtenergie im Intervall $\omega_{\text{min}} \dots \omega_{\text{max}}$ gebildet werden, bei Berücksichtigung von Vielfachstreuung ab. Die Ursache hierfür ist die Verschiebung des Energiespektrums in Richtung auf größere Werte von ω (vgl. die Diskussion der Abbn. 6-11a und

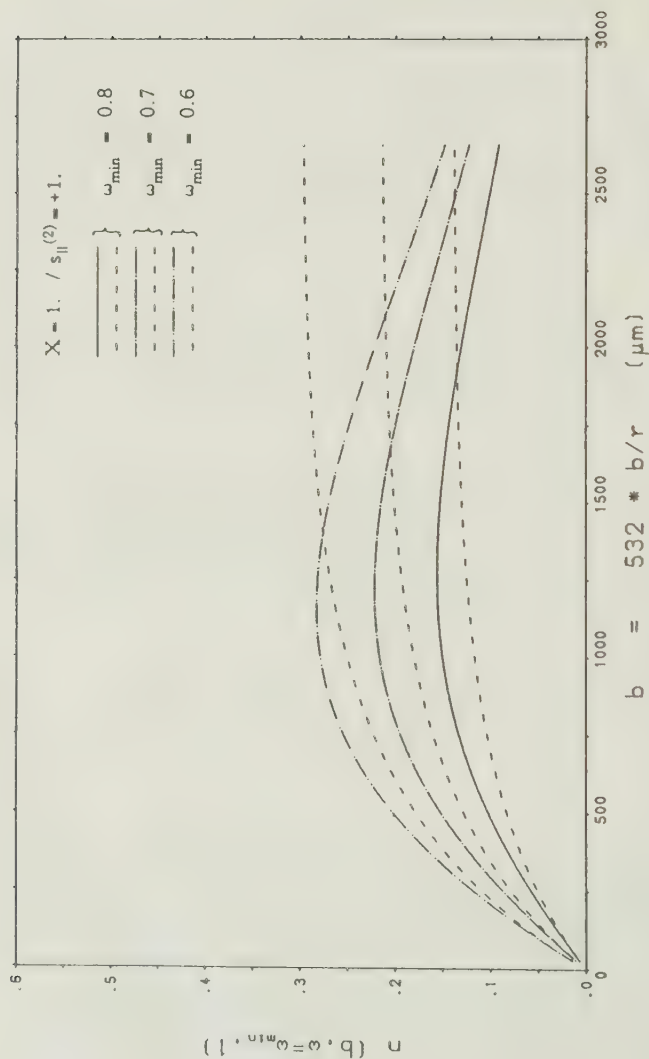


Abb. 6 - 13a : Wahrscheinlichkeit $n(b, \omega_{\min}, 1)$ (Def. s. (6-107)), daß nach Durchfliegen einer Targetschicht der effektiven Dicke b (vgl. (6-54a), Photonendichte $n_{2,0} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$) die Compton-rückgestreuten γ -Quanten im Detektor eine Energie im Intervall $[\omega_{\min}, 1]$ deponieren. Die gestrichelten Kurven erhält man bei Vernachlässigung von Vielfachstreuung. Es ist $X = 1$, $s_{\parallel}^{(1)} = +1$ und $s_{\parallel}^{(2)} = +1$ vorausgesetzt.

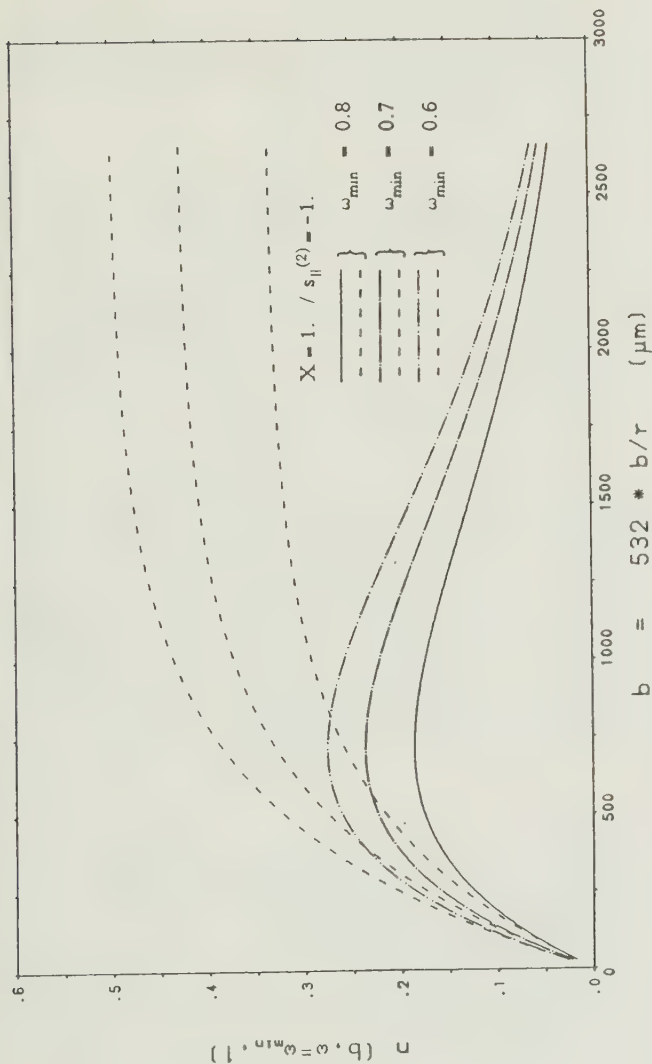


Abb. 6 - 13b : Beschreibung siehe Abb. 6 - 13a. Der einzige Unterschied besteht in der zirkularen Polarisation der Photonen: Es ist $s_{\parallel}^{(2)} = -1$.

6 - 11b).

In Abb. 6 - 14 ist die zugehörige Asymmetrie $A_m(b, \omega_{\min}, \omega_{\max})$ graphisch dargestellt. Sie ist analog zu (6-106) definiert, mit dem Unterschied, daß die Dichtefunktionen $u(b, \omega)$ durch die Streuwahrscheinlichkeiten $n(b, \omega_{\min}, \omega_{\max})$ aus (6-107) ersetzt werden müssen.

Die wichtigste Feststellung beim Betrachten von Abb. 6 - 14 ist, daß die Meßasymmetrie A_m von der Wegstrecke b abhängt. Vielfachstreuung bewirkt einen langsamen Abfall von $|A_m|$. In Bereich $b \approx 2 r$ wechselt die Funktion das Vorzeichen. Mit zunehmender Wegstrecke im Photontarget verschwindet daher zunächst die Eignung von Compton-Streuung zur Polarisationsmessung. Erst für $b \geq 3 r$ hängt die Erzeugung harter Photonen im Energiebereich $\omega_{\min} = 0.6 \dots \omega_{\max} = 1$ wieder spürbar von der Polarisation der einlaufenden Elektronen ab.

Mit Hilfe der Argumentation aus Kap.2, Gl. (2-105) ff., kann man die Zahl N_o der erforderlichen Teilchen für eine Polarisationsmessung als Funktion der Flugstrecke b im Target angeben. Da $A_m(b, \omega)$ für Vielfachstreuung nicht mehr linear von $s_{\parallel}^{(1)}$ abhängt, ist eine leichte Abänderungen des Ausdrucks (2-113) erforderlich. Zwar ist der Meßfehler ΔA_m der Asymmetriebestimmung infolge von Zählratenschwankungen weiterhin durch (2-107) gegeben, wenn man für die Anzahl der registrierten Teilchen in den Anordnungen "A" bzw. "B"

$$N_A = N_o' n(b, \omega_{\min}, \omega_{\max}; s_{\parallel}^{(1)}, s_{\parallel}^{(2)} = \pm 1) \quad (6-108)$$

einsetzt, mit $n(\dots)$ aus (6-107). Für den Zusammenhang zwischen ΔA_m und $\Delta s_{\parallel}^{(1)}$ muß jedoch die allgemeinere Beziehung

$$\Delta A_m = \left| \frac{\partial A_m}{\partial s_{\parallel}^{(1)}} \right| \Delta s_{\parallel}^{(1)} \quad (6-109)$$

verwendet werden. Faßt man die Gln. (2-107), (6-108) und (6-109) zusammen, so erhält man

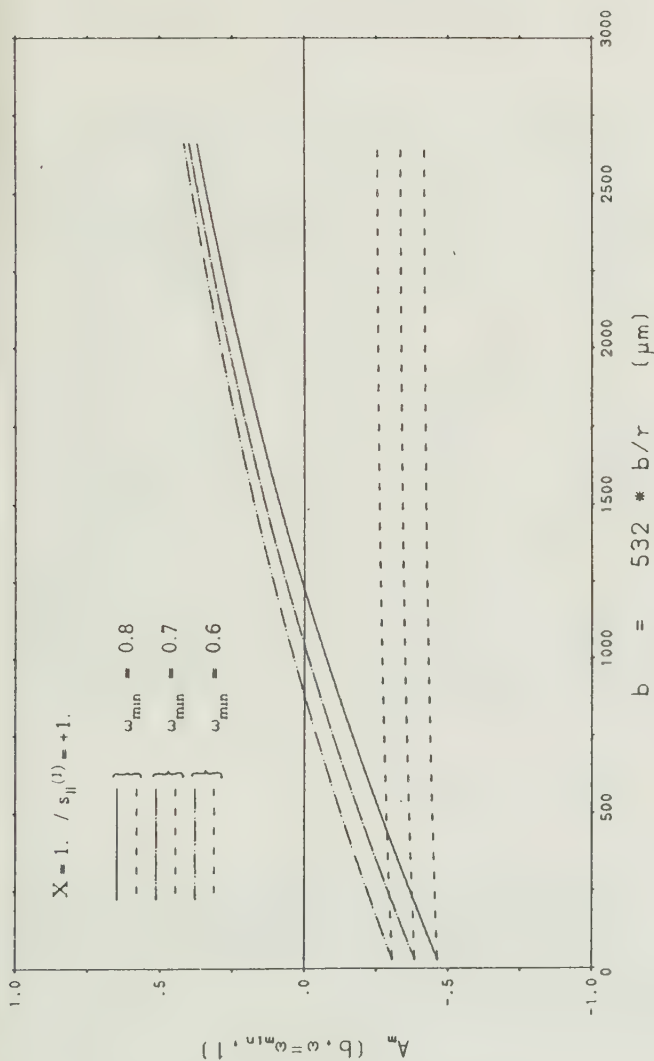


Abb. 6-14 : Zählratenasymmetrie $A_m(b, \omega_{\min}, 1)$ (vgl. (6-106)) für Photonschauer der Energie $\omega_{\min} \lesssim \omega \lesssim 1$ infolge des Umklappens der Photonenpolarisation von $s_{\parallel}^{(2)} = +1$ nach $s_{\parallel}^{(2)} = -1$ in Abhängigkeit von der effektiven Weglänge b im Lasertarget (s. (6-54a), verwendete Photonendichte $n_{2,0} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$). Vernachlässigung von Vielfachstreuung ergibt den gestrichelt eingezeichneten Funktionsverlauf. Es ist $X = 1$ und $s_{\parallel}^{(1)} = +1$ vorausgesetzt.

$$N_o = \frac{2}{(\Delta s_{||}^{(1)})^2} \frac{1 - A_m^2(s_{||}^{(1)}, s_{||}^{(2)})}{|\partial A_m / \partial s_{||}^{(1)}|^2 [n(\dots, +1) + n(\dots, -1)]} \quad (6-110)$$

Die Funktion N_o ist in Abb. 6 - 15 als Funktion von b für die drei verschiedenen, in den Abbn. 6 - 13 und 6 - 14 verwendeten Energieintervalle aufgetragen. Zum Vergleich ist die erforderliche Teilchenzahl ohne Berücksichtigung von Vielfachstreuung gestrichelt eingezeichnet. Es ist $s_{||}^{(1)} = 1$ und $|s_{||}^{(2)}| = 1$ vorausgesetzt. (Die Singularitäten liegen bei dem Null-Durchgang der Funktion $\text{Addm}(b, \omega, 1)$ in Abb. 6 - 14.)

Die Werte in Abb. 6 - 15 umfassen die Daten zu $X = 1$ aus den Tabellen 6 - 2 und 6 - 3 (Eine kleine Diskrepanz tritt auf, da Abb. 6 - 15 die volle Gl. (6-110) zugrundeliegt, während in den Tabellenwerten der Zählerausdruck $1 - A_m^2$ durch 1 ersetzt ist). Man erkennt, daß die Effektivität des Laserpolarimeters aus Abschnitt 6.3 sich verschlechtert, wenn man die Flugstrecke im Target größer als $b \approx r/2 \approx 250 \mu\text{m}$ wählt. Erst für $b \geq 5r$ erhält man wieder eine effektive Anordnung. (Falls Targetschichten dieser Länge zur Verfügung stehen, empfiehlt es sich jedoch, den Bereich der registrierten Photonen zu höheren Energien zu verschieben (vgl. die Energiespektren in Abb. 6 - 11a und 6 - 11b).) Bei näherer Betrachtung der Funktion $N_o(b)$ für $b \leq 0.5 r$ stellt man fest, daß ungefähr

$$N_o \approx 100 / (\Delta s_{||}^{(1)})^2$$

Elektronen für eine Polarisationsmessung mit der Genauigkeit $\Delta s_{||}^{(1)}$ benötigt werden. Die ohne Vielfachstreuung berechneten Werte für N_o stimmen für $b \leq 0.2 r$ gut mit den Daten für Vielfachstreuung überein. Für $b \approx 0.5 r$ liegen die genauen Werte bereits um ca. einen Faktor 2 über den Näherungswerten.

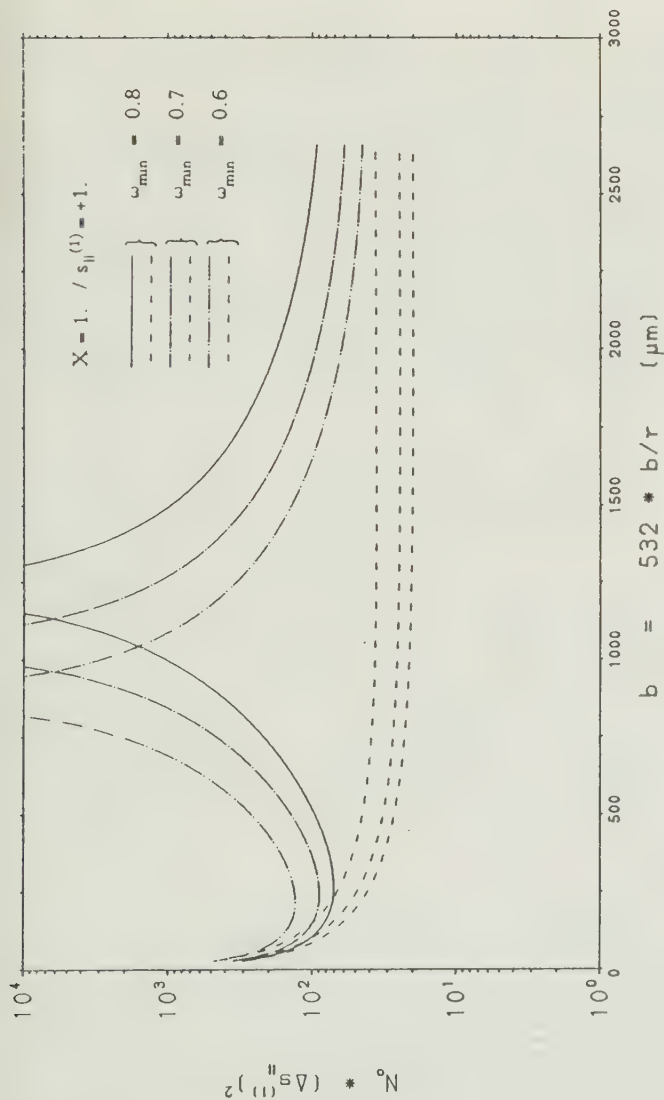


Abb. 6-15: $N_0 \times (\Delta s_{||}^{(1)})^2$ als Funktion der effektiven Weglänge b (s. (6-54a), Photonendichte $n_{2,0} = 2.51 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$) im Lasertarget. N_0 Elektronen werden für eine Polarisationsmessung mit der Genauigkeit $\Delta s_{||}^{(1)}$ benötigt. Gemessen werden Streueignisse mit einer Gesamtenergie der rückgestreuten Photonen im Intervall $[\omega_{\min}, 1]$. Weiter ist $X = 1, s_{||}^{(1)} = +1$ und $|s_{||}^{(2)}| = 1$. Gestrichelten Kurven sind ohne Vielfachstreuung berechnet.

6.5. Zusammenfassung

Compton-Streuung an dichten, zirkular polarisierten Photonenbündeln eines Hochleistungslasers ist der am besten geeignete Prozess zur Bestimmung der longitudinalen Polarisation hochenergetischer Elektronen im Endzustand eines Streuexperimentes. Verwendet man als Target die Photonen eines Nd-Glas-Lasers mit einer Teilchendichte von $2.5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$ (solche Dichten können mit Hilfe existierender Laser von 10^{12} W Leistung bei einer Pulsdauer von 10^{-10} s und bei einer Strahlbündelung auf $30 \text{ }\mu\text{m}$ Durchmesser erzielt werden) und setzt voraus, daß die Laserphotonen vollständig zirkular polarisiert sind (etwa mit Hilfe einer Pockels-Zelle), dann ist es möglich, an einem Ensemble von

$$N_o \approx \frac{1}{(\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2} \quad 100 \dots 200 \quad (6-111)$$

Elektronen der Energie 50 GeV die Polarisation mit einer statistischen Genauigkeit von $\Delta s_{\parallel}^{(1)}$ zu messen. (Mit leistungsstärkeren Lasern läßt sich der Zahlenfaktor in (6-111) in den Bereich $50 \dots 100$ drücken (vgl. Abb. 6 - 15).) Die Meßanordnung kann man sich wie in Abb. 6 - 4 vorstellen. Dort durchlaufen die zu analysierenden Elektronen ein dicht neben der Wechselwirkungszone platziertes Photonenbündel. Die Zahlenangabe (6-111) erhält man unter der Voraussetzung, daß die Elektronen eine Wegstrecke von $250 \dots 50 \text{ }\mu\text{m}$ im Photontarget zurücklegen.

Die experimentelle Bestimmung des Polarisationsgrades erfolgt in der beschriebenen Anordnung durch Ausmessen der Polarisationsasymmetrie (= Zählratenasymmetrie bei Änderung des Vorzeichens der zirkularen Polarisation der Photonen) am hochenergetischen Ende des Energiespektrums der harten rückgestreuten Photonen. Die Genauigkeit der Energie- und Impulsmessung an dem geplanten SLD-Detektor am SLAC-SLC würde ausreichen, um die Asymmetrie experimentell zu erfassen. Der systematische Fehler aus der Energiemessung mit dem

SLD-Detektor entspricht einer Ungenauigkeit $\delta s_{\parallel}^{(1)}$ im Polarisationsgrad von

$$\delta s_{\parallel}^{(1)} \approx 0.1 \dots 0.2 . \quad (6-112)$$

Die zur Polarisationsmessung erforderlichen N_0 Elektronen (siehe (6-111)) müssen mit dem beschriebenen Photonenbündel kollidieren. Im Idealfall ist bei jeder primären Wechselwirkung die Wechselwirkungszone von Photonen umgeben. Um dem Idealfall möglichst nahe zu kommen, darf wegen der geringen Pulsrate von Hochleistungslasern die Repetitionsrate ν des Beschleunigers nicht groß sein. Die Beschleunigeranlagen SLAC-SLC ($\nu = 180$ Hz) und VLEPP ($\nu = 10$ Hz) erfüllen diese Forderung am besten. Aber auch dort läßt sich mit heutigen Hochleistungslasern keine ausreichende Ereignisrate erzielen, da die Laserpulse nur in Abständen von einigen Minuten geliefert werden können. Da Hochleistungslaser mit größerer Pulsrate beispielsweise im Rahmen der Laser-induzierten Kernfusion erforderlich sind, kann man auf baldige Verbesserung der Situation hoffen.

7. PRINZIP UND EFFEKTIVITÄT DER POLARISATIONSMESSUNG VON $\mu^\pm$ UND $\tau^\pm$

Geht man von der Universalität der Wechselwirkung von Elektronen, Myonen und Tauonen aus, so läßt sich in mancher Hinsicht das Studium gestreuter Elektronen ersetzen durch die Untersuchung von Myonen und Tauonen im Endzustand eines Streueignisses. Beispielsweise kann man in hochenergetischen Paarerzeugungsprozessen anstelle des Kanals für die Entstehung von Elektronen und Positronen den Kanal für die Bildung eines Tauonen-Paares betrachten. Es ist daher sinnvoll, die Polarisationsmessung an Elektronen mit derjenigen an Myonen und Tauonen zu vergleichen.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wurden Messungen der Endzustandspolarisation an Myonen und Tauonen durchgeführt [17,18]. Sie beruhen auf der Analyse von Zerfallsprodukten dieser instabilen Leptonen. Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die dabei untersuchten Zerfallskanäle gegeben. Die Anzahl der Tauonen, die man für eine Polarisationsmessung benötigt, wird abgeschätzt. Es wird gezeigt, daß man für die Polarisationsanalyse von Tauonen vergleichbar viele Probeteilchen benötigt wie für die Polarisationsmessung von Elektronen mittels Compton-Streuung an Photonen eines Hochleistungslasers.

7.1. Polarisationsabhängigkeit des Zerfallsspektrums

Das Betragsquadrat des Matrixelementes ME für den Zerfall eines Teilchens, das sich längs der positiven z -Richtung bewegt, kann man mit den Formeln aus Anhang B durch Helizitätsamplituden ausdrücken. Die Azimutwinkelverteilung der Zerfallsprodukte läßt sich explizit angeben. Sie ist identisch mit der Azimutwinkelverteilung der Streuprodukte nach der kollinearen Kollision mit einem Spin-0-Teilchen.

Diese wird durch (B-48) beschrieben, wobei nur Terme proportional zu R-Funktionen der Form $R(J_1, M_1; 0, 0)$ übrigbleiben. Unter Verwendung von (B-51) erhält man für die Struktur des Betragsquadrates des Matricelementes ME:

$$|ME|_{\text{Norm}}^2 = 1 + s_{\parallel} A_L + s_{\perp} \{ \cos(\Phi_3 - \psi) A_T' + \sin(\Phi_3 - \psi) A_T \}, \quad (7-1)$$

mit $A_L = \hat{R}(1, 0; 0, 0)$, $A_T' = -\sqrt{2} Q \operatorname{Re} \hat{R}(1, 1; 0, 0)$ und $A_T = \sqrt{2} Q \operatorname{Im} \hat{R}(1, 1; 0, 0)$. $s_{\parallel} \equiv s_{\parallel}^{(1)}$, $s_{\perp} \equiv s_{\perp}^{(1)}$ und $\psi \equiv \psi^{(1)}$ sind die Parameter der Dichtematrix des Leptons (vgl. (2-45)). Φ_3 ist der Azimutwinkel der Emissionsrichtung des beobachteten Teilchens 3. Die Asymmetriekoeffizienten A_L , A_T und A_T' hängen nur von Θ_3 ab. Für Zweiteilchen-Zerfälle läßt sich auch die Θ_3 -Abhängigkeit durch Partialwellenentwicklung explizit angeben [79]. Für jede Polarisationsasymmetrie bleibt dann nur noch eine Konstante zu bestimmen. Falls der Zerfallsprozess paritätserhaltend ist, verschwinden die Größen A_L und A_T' : Da nach (B-46) A_L reell ist, andererseits dann (B-49) gilt, verschwindet A_L ; nach (B-49) ist $R(1, 1; 0, 0)$ rein imaginär und somit $A_T' = 0$.

Beachtet man, daß für hochenergetische Leptonen die Zerfallsprodukte im Laborsystem nur unter einem kleinen Winkel zur Impulsrichtung des zerfallenden Teilchens emittiert werden, und geht davon aus, daß die Azimutwinkelverteilung der erzeugten Teilchen nicht gemessen wird, dann hat man (7-1) über den Azimutwinkel Φ_3 zu integrieren. Dann bleibt nur der Term A_L proportional zur longitudinalen Polarisation $s_{\parallel}$ übrig. Für die schwach zerfallenden Myonen und Tauonen ist $A_L \neq 0$, da die Parität dort nicht erhalten ist.

Im Schwerpunktsystem macht sich die longitudinale Polarisation des zerfallenden Teilchens in der Polarwinkelverteilung des beobachteten Teilchens 3 bemerkbar (A_L ist von $\Theta_{3,S}$ abhängig). Diese Winkelverteilung spiegelt sich im Energiespektrum der emittierten Teilchen im Laborsystem wider. Definiert man die dimensionslose Impulsvariable

$$x = \frac{P_{3,L} - P_{3,L;\min}}{P_{3,L;\max} - P_{3,L;\min}} \quad (7-2)$$

($p_{3,L;\min}$ ist der minimale, $p_{3,L;\max}$ der maximale Betrag des Impulses von Teilchen 3 im Laborsystem) mit dem Wertebereich $0 < x < 1$, dann kann man das Zerfallsspektrum in der Form

$$dW/dx = f(x) + s_{\parallel} g(x) \quad (7-3)$$

angeben. dW ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem bestimmten Kanal Teilchen 3 in das Impulsintervall $x \dots x + dx$ emittiert wird. Das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ über die Funktion dW/dx ergibt die gesamte Zerfallswahrscheinlichkeit für diesen Kanal und hat daher den Wert 1, unabhängig vom Polarisationszustand des zerfallenden Teilchens. Deshalb muß das Integral von 0 bis 1 der Funktion $g(x)$ verschwinden und für die Funktion $f(x)$ den Wert 1 annehmen. Der Verlauf der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist vom Zerfallsprozess abhängig:

Beispiele für den Zerfall in 3 Teilchen :

Die Kanäle

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu}, \quad (7-4a)$$

$$\tau^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu}, \quad (7-4b)$$

$$\tau^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} \nu \bar{\nu} \quad (7-4c)$$

(die Neutrinoarten sind geeignet festzulegen) werden betrachtet. Vernachlässigt man Terme der Ordnung m_3/m_1 (Teilchen 3 ist hier das geladene Lepton im Endzustand), so sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ für alle Prozesse (7-4a) bis (7-4c) dieselben (siehe z.B. [80,18]):

$$\begin{aligned} f(x) &= (5 - 9x^2 + 4x^3) / 3, \\ g(x) &= \mp (5 - 9x^2 + 8x^3) / 3. \end{aligned} \quad (7-5)$$

Das obere (untere) Vorzeichen ist für den Zerfall positiver (negativer) Leptonen zu verwenden.

Beispiele für Zweiteilchen-Zerfälle :

Für die Zerfallsprozesse

$$\tau^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} \nu \quad (7-6)$$

und

$$\tau^{\pm} \rightarrow \rho^{\pm} \nu \quad (7-7)$$

ist

$$f(x) \equiv 1,$$

$$g(x) \equiv \mp c (2x - 1), \quad (7-8)$$

mit der Konstanten $c = 1$ für den Prozess (7-6) und $c = 0.46$ für den Zerfall (7-7). Die Zuordnung von oberem und unterem Vorzeichen in (7-8) ist dieselbe wie in (7-6): das obere (untere) Vorzeichen entspricht dem τ^{+} -(τ^{-}) Zerfall.

7.2. Effizienz der Polarisationsmessung

Für Polarisationsmessungen an hochenergetischen instabilen Leptonen kommt der Lebensdauer eine entscheidende Bedeutung zu. Sie beträgt für Myonen $\tau_{\mu} \approx 2 \times 10^{-6}$ s. Die Flugstrecke a hochenergetischer Myonen im Laborsystem ist deshalb sehr groß.

$$\begin{aligned} a &= \gamma_{1,L} c \tau_{\mu} \approx 57 \text{ km für } E_{1,L} = 10 \text{ GeV,} \\ &\approx 2850 \text{ km für } E_{1,L} = 500 \text{ GeV.} \end{aligned} \quad (7-9)$$

Nur ein sehr geringer Bruchteil der gebildeten Myonen zerfällt normalerweise im Detektor. Aufwendige Vorrichtungen zum Abbremsen der

Teilchen werden erforderlich (z.B. riesige Eisentargets [17]), um den Anteil der beobachtbaren Zerfälle und damit die Ereignisrate für die Polarisationsanalyse zu vergrößern.

Tauonen dagegen, mit einer Lebensdauer von

$$\tau_{\tau} \approx (m_{\mu} / m_{\tau})^5 \times \tau_{\mu} \approx 10^{-12} \text{ s}, \quad (7-10)$$

fliegen wesentlich weniger weit (vgl. (7-9)):

$$\begin{aligned} a &\approx 0.33 \text{ cm für } E_{1,L} = 10 \text{ GeV}, \\ &\approx 16.5 \text{ cm für } E_{1,L} = 500 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (7-11)$$

Sie zerfallen vollständig im Detektor. Daher läßt sich ihre Polarisation leichter bestimmen. Die Effektivität einer Polarisationsmessung an Tauonen wird im folgenden näher betrachtet.

Die Wahrscheinlichkeit $W[x_1, x_2]$, daß in einem bestimmten Zerfallskanal das Zerfallsprodukt 3 einen Impuls im Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$ hat, erhält man durch Integration von (7-3).

$$W[x_1, x_2] = F[x_1, x_2] + s_{\parallel} G[x_1, x_2] \quad (7-12a)$$

mit

$$F[x_1, x_2] \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad G[x_1, x_2] \equiv \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx. \quad (7-12b)$$

Wenn B das Verzweungsverhältnis für den betrachteten Kanal bezeichnet, dann zerfallen von N_0 ursprünglich vorhandenen Tauonen mit der Polarisation $s_{\parallel}$ somit

$$N = N_0 B \{ F[x_1, x_2] + s_{\parallel} G[x_1, x_2] \} \quad (7-13)$$

Teilchen auf die angegebene Art. Die Zahl N wird experimentell bestimmt. Mit Hilfe der bekannten Größen N_0 , B, $F[\dots]$ und $G[\dots]$

kann man daraus den longitudinalen Polarisationsgrad $s_{||}$ ermitteln. Infolge der statistischen Schwankungen der Zählrate N ist die Messung von $s_{||}$ mit einem (statistischen) Fehler $\Delta s_{||}$ verbunden: $\Delta s_{||} = |\partial s_{||} / \partial N| \times \Delta N$. Mit dieser Formel erhält man einen Zusammenhang zwischen der Anzahl N_0 der Probesteilchen und dem Meßfehler $\Delta s_{||}$.

$$N_0 = \frac{1}{(\Delta s_{||})^2 B} \frac{F[\dots] + s_{||} G[\dots]}{G^2[\dots]} \quad (7-14)$$

Dabei ist $\Delta N = \sqrt{N}$ verwendet. Um mit einer kleinen Zahl von Probesteilchen auszukommen, sollte das Integral $G[\dots]$ möglichst groß sein. Da die Funktion $g(x)$ innerhalb des Intervalles $[0, 1]$ das Vorzeichen wechselt (das erfordert die Normierungsbedingung für die Funktion dW/dx aus (7-3)), wählt man die Integrationsgrenzen x_1 und x_2 zweckmäßigerweise so, daß eine von ihnen mit der Nullstelle der Funktion $g(x)$ zusammenfällt.

Es folgen einige Zahlenbeispiele für die Größe N_0 . Integriert man von der Nullstelle $x_0 \equiv x_1$ bis $x_2 = 1$, so erhält man (das obere Vorzeichen entspricht dem τ^+ -Zerfall):

$$- \quad \tau^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu} \text{ (oder } \mu^{\pm} \nu \bar{\nu} \text{)} :$$

$x_0 = 0.4215$ und $B = 0.18$ [18] führen zu

$$N_0 = \frac{1}{(\Delta s_{||})^2} 268 (1 \pm s_{||} \times 0.24) \lesssim \frac{1}{(\Delta s_{||})^2} 330 \quad (7-15)$$

$$- \quad \tau^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} \nu :$$

Mit $x_0 = 0.5$ und $B = 0.1$ [18] wird (7-14) zu

$$N_0 = \frac{1}{(\Delta s_{||})^2} 80 (1 \mp s_{||} \times 0.50) \lesssim \frac{1}{(\Delta s_{||})^2} 120 \quad (7-16)$$

$$- \quad \tau^{\pm} \rightarrow \rho^{\pm} \nu :$$

$x_0 = 0.5$ und $B = 0.23$ [18] ergeben

$$N_0 = \frac{1}{(\Delta s_{\parallel})^2} 164 (1 \mp s_{\parallel} \times 0.23) \leq \frac{1}{(\Delta s_{\parallel})^2} 200 . \quad (7-17)$$

Die Anzahl N_0 der benötigten Teilchen läßt sich verringern, indem man mehrere Zerfallskanäle gleichzeitig zur Polarisationsanalyse benutzt. Auf diese Weise wurde mit dem CELLO-Detektor [18] die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie $A(s_{\parallel})$ der τ^- -Polarisation in der Reaktion $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^-$ gemessen:

$$A(s_{\parallel}) \equiv (\langle s_{\parallel} \rangle_V - \langle s_{\parallel} \rangle_R) / 2 = +0.01 \mp 0.22 . \quad (7-18)$$

$\langle s_{\parallel} \rangle_V$ ($\langle s_{\parallel} \rangle_R$) bezeichnet die mittlere Polarisation der vorwärts-(rückwärts-)gestreuten τ^- . Der Messung lagen 526 $\tau^+ \tau^-$ -Ereignisse zu Grunde. Damit kann man (noch recht ungenaue) Grenzen für die Vektorkopplungskonstante des Tauons angeben. Sie stellen aber bereits eine Verbesserung gegenüber den Grenzen dar, die man aus dem totalen Wirkungsquerschnitt für $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^-$ ermittelt.

Ein Vergleich der Zahlenwerte (7-15) bis (7-17) mit dem Wert für N_0 aus (6-111) zeigt, daß man für die Polarisationsanalyse von Tauonen eine vergleichbare Anzahl von Probeteilchen benötigt wie für die Polarisationsmessung von Elektronen mittels Compton-Streuung an Photonen eines Hochleistungslasers.

8. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

8.1. Vergleich von Compton-Streuung mit anderen Analyseprozessen zur Messung der longitudinalen Polarisierung von Elektronen

Polarisationsmessung mittels Compton-Streuung an den Photonenbündeln eines Hochleistungslaser ist ein sehr effektives Verfahren, falls die zu messenden Elektronen sowie die Laserphotonen genügend hohe Energie haben. Der Parameter $X = 4E_{1,L}E_{2,L}/m_2^2$ (siehe (6-27)) muß die Größenordnung 1 erreichen. Diese Voraussetzung ist z.B. erfüllt, wenn die Energie der Elektronen $E_{1,L} \geq 30$ GeV ist und die Photonenenergie $E_{2,L} = 1$ eV beträgt (daraus folgt $X \geq 0.5$).

In Abschnitt 6.3 wurde gezeigt, daß bei Verwendung eines Nd - Glas - Lasers ($E_{2,L} = 1.17$ eV) mit einer Leistung von $L = 1$ TW, der einen 0.1 ns langen Puls abgibt, eine Messung der longitudinalen Polarisierung mit der Genauigkeit $\Delta s_{||}^{(1)}$ an

$$N_o = \frac{1}{(\Delta s_{||}^{(1)})^2} 100 \dots 200 \quad (8-1)$$

Elektronen der Energie 50 GeV möglich ist (s. (6-111)). Dabei ist vorausgesetzt, daß die vollständig zirkular polarisierten Lichtbündel auf 30 μm Durchmesser fokussiert werden (die Photonendichte beträgt dann $n_{2,o} = 2.5 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$) und daß die zu analysierenden Elektronen 50 - 250 μm innerhalb des Targets zurücklegen. Durch Verwendung leistungsstärkerer Laser läßt sich die Anzahl N_o der erforderlichen Teilchen noch um etwa einen Faktor 1/2 verringern.

Zum Vergleich ist in Gl. (5-52) die Teilchenzahl N_o für eine Polarisationsmessung an polarisierten festen Targets mit

$$N_o \geq 10^5 \times \frac{E_{1,L} / \text{GeV}}{(\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2} \quad (8-2)$$

angegeben. Dabei ist angenommen, daß die zu analysierenden Elektronen eine Weglänge von der Größenordnung der Strahlungslänge zurücklegen und daß der Polarisationsgrad des Targets 10 % beträgt. Für $E_{1,L} \approx 50 \text{ GeV}$ werden also mehr als 50 000 mal soviel Teilchen benötigt.

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an festen Targets nimmt mit der Energie der Elektronen ab. Deshalb steigt N_o in (8-2) mit $E_{1,L}$ an. Im Unterschied dazu zeigt (8-1) keine Energieabhängigkeit. Der Grund ist folgender: Zwar ist auch der Compton-Streuquerschnitt und damit die Zahl N_o von der Energie der einfallenden Elektronen abhängig. Diese Energieabhängigkeit ist aber vollständig in der Größe X enthalten. Da X aus dem Produkt von Elektronen- und Photonenenergie besteht, kann man ein Anwachsen der Elektronenenergie kompensieren, indem man die Photonenenergie verringert, also die Wellenlänge des Lasers erhöht. Man kann auf diese Weise die experimentellen Bedingungen so wählen, daß (8-1) über einen weiten Energiebereich gültig bleibt. Je mehr die Energie der Elektronen ansteigt, desto deutlicher zeigt sich daher der Effektivitätsvorteil von Compton-Streuung.

Ein wesentlicher Grund für die höhere Effektivität von Compton-Streuung besteht darin, daß Photonentargets vollständig polarisierbar sind, während man für Elektronen- und Protonentargets nur einen Polarisationsgrad von ca. 10 % erreichen kann. Da N_o quadratisch von der Targetpolarisation abhängt, benötigt man mit Compton-Streuung von vornherein um einen Faktor 100 weniger Teilchen.

Abgesehen von der Effektivität weist Compton-Streuung noch weitere Vorteile gegenüber anderen Analyseprozessen auf:

1) Die eben erwähnte gute Polarisierbarkeit von Lasertargets ist gleichzeitig eine wesentliche Voraussetzung, um die Auswirkung von systema-

tischen Fehlern auf die Messung der Polarisationsabhängigkeit eines Streuquerschnittes klein halten zu können: Die Polarisationsasymmetrie ist proportional zur Targetpolarisation. Wegen der ca. 10 mal kleineren Polarisationsasymmetrie bei der Streuung an Elektronen oder Protonen müssen systematische Fehler in dem Fall um denselben Faktor niedriger sein als bei Compton-Streuung, damit man dieselbe Meßgenauigkeit erzielen kann.

2) Zur Polarisation eines Festkörpertargets sind Vorrichtungen (Magnetfelder, etc.) erforderlich, welche direkt am Ort des Targets untergebracht werden müssen. Die Polarisation von Photonen kann dagegen an einer Stelle weitab von der Wechselwirkungszone erfolgen. Das ist interessant im Hinblick auf die Registrierung der Teilchen im Endzustand des Analyseprozesses: Während der Platzbedarf von Lasertargets sehr klein ist, sodaß existierende Hochenergiedetektoren zur Teilchenanalyse verwendbar sind (vgl. Abb. 6 - 4), lassen sich polarisierte Festkörpertargets wohl nicht ohne Neuauslegung des Detektors einbauen.

3) Nur Elektronen werden an den Laserphotonen gestreut. Andere Teilchen haben einen geringeren Compton-Streuquerschnitt und passieren das Target ohne Wechselwirkung. Das Photonentarget sucht sich die zu analysierenden Teilchen gewissermaßen selbst aus; es finden keine Reaktionen statt, die mit der Polarisationsanalyse nichts zu tun haben. Das ist anders, wenn man ein festes Target in der Nähe der Wechselwirkungszone plaziert: Erstens können Elektronen oder Positronen dann auf verschiedene Weise gestreut werden (Bremsstrahlung, Paarerzeugung, ...); zweitens können andere Endprodukte des Primärprozesses (beispielsweise Hadronen) mit dem Target wechselwirken und eine Vielzahl weiterer Teilchen bilden. Die Analyse des Primärprozesses wird so erschwert.

Lasertargets haben leider auch einen schwerwiegenden Nachteil. Ein Photonenbündel ist nicht konservierbar; es muß jedesmal von einem Hochleistungslaser neu erzeugt werden. Gegenwärtig liegt die Pulsrate von Hochleistungslasern bei ca. 10^{-3} Hz. Folglich kann man - bei Installation des Polarimeters am SLAC-SLC - nur für jeden 10^5 -ten primären Wechselwirkungsprozess ein Lasertarget zur Verfügung stellen. Wegen dieser geringen Ausnützung erhöht sich die Anzahl der benötig-

ten Teilchen N_o aus (8-1) auf den effektiven Wert $N_o \times 10^5$. An Hochleistungslasern mit deutlich verbesserter Pulsrate wird jedoch gearbeitet (Fusionsforschung, etc.).

8.2. Chancen und Bedingungen für die Realisierung eines Laser-Polarimeters; Ausblick

Die Eigenschaften der Photonenbündel existierender Hochleistungslaser sind ausreichend, um mit der in Abb. 6-4 skizzierten Anordnung an $N_o = 100 \dots 200 / (\Delta s_{\parallel}^{(1)})^2$ Elektronen den longitudinalen Polarisationsgrad mit der Genauigkeit $\Delta s_{\parallel}^{(1)}$ messen zu können. Die Meßbarkeit der Polarisationsasymmetrie des Energiespektrums mit Hilfe gängiger Detektortechnologie ist gewährleistet. Einer Realisierung der vorgeschlagenen Anordnung steht in erster Linie die gegenwärtig noch niedrige Pulsfrequenz ν_L der existierenden Hochleistungslaser (mit geeigneter Wellenlänge) im Wege. Wie bereits erwähnt, kann mit dem derzeit typischen Wert von $\nu_L \approx 10^{-3}$ Hz für Nd-Glas-Laser am SLAC-SLC (Repetitionsrate $\nu_B = 180$ Hz) nur für jeden 10^5 -ten primären Wechselwirkungsprozess ein Photonentarget zur Verfügung gestellt werden. An Ringbeschleunigern ist die Situation noch ungünstiger:

- Den LEP - Beschleuniger mit einem Umfang von 30 km durchlaufen 4 Teilchenbündel in jeder Richtung [81]. Daraus errechnet sich eine Frequenz von $\nu_B = 8 \times 10^4$ Hz.
- Bei HERA kreisen 210 Teilchenpakete auf einem Ring von 6.3 km Umfang [15]. Die Wiederholungsrate ist $\nu_B = 2 \times 10^7$ Hz.

Die erreichbaren Zählraten sind somit noch zu klein für eine Messung der Polarisierung von Elektronen im Endzustand eines hochenergetischen Streuexperimentes. Eine größere Pulsrate der Hochleistungslaser würde Abhilfe schaffen.

Prinzipiell bieten Beschleunigeranlagen vom Typ des SLAC-SLC günstige Voraussetzungen zur Messung der Endzustandspolarisation:

- 1) Die Beschleunigerfrequenz ν_B ist niedrig.
- 2) Der Strahl der beschleunigten Teilchen ist in der Wechselwirkungszone stark gebündelt ($d = 2.6 \mu\text{m}$). Dadurch kann das Lasertarget nahe an die Wechselwirkungszone herangeführt werden. Ein einziges Bündel überdeckt so einen großen Raumwinkelbereich.
- 3) Die beschleunigten Teilchen werden nur einmal verwendet, sodaß Teilchenstrahl und Photonenbündel kollidieren dürfen. Auf diese Weise ist eine Polarisationsmessung im Bereich kleiner Streuwinkel möglich.

Punkt 3) ist erstens interessant, weil viele Streuquerschnitte bei kleinen Streuwinkeln stark ansteigen und zweitens, weil man auf diese Weise am einfachsten die Probleme mit der noch geringen Repetitionsrate von Hochleistungslasern umgehen kann. Denn bei Messung im Bereich kleiner Winkel kollidieren Laserstrahl und zu analysierendes Elektron annähernd kollinear. Das Photonenbündel wird in Längsrichtung durchlaufen. Man benötigt daher eine kleinere Photonendichte, sodaß Laserapparate mit geringerer Spitzenleistung ausreichen. Als Folge davon lassen sich höhere Pulsraten erzielen. Die Analyse der Tertiärteilchen muß in dem Fall allerdings in einem separaten Detektor erfolgen.

Die Methode, mittels Compton-Effekt die Polarisation zu bestimmen, hält auch zukünftigen Entwicklungen stand. Dazu sei daran erinnert, daß sich durch Compton-Streuung die Polarisation auch von Elektronen im TeV-Bereich bestimmen läßt. Man hat lediglich Laserlicht größerer Wellenlänge zu verwenden. In gewisser Weise wird die Situation bei höheren Energien sogar einfacher, denn die Voraussetzungen, um die Pulsrate des langwelligen CO_2 -Lasers (10-fache Wellenlänge des Nd-Glas-Lasers) zu vergrößern, sind sehr günstig.

8.3. Polarisationsmessung an Tauonen gegen Polarisationsmessung an Elektronen mittels Compton-Streuung

Wie in Kap. 7 angedeutet, können Tauonen, unter der Voraussetzung von Universalität der Wechselwirkung, in mancher Hinsicht Elektronen ersetzen.

Tauonen haben die angenehme Eigenschaft, daß sie innerhalb des Detektors zerfallen und daß aus den Zerfallsprodukten auf die Polarisation des Teilchens zurückgeschlossen werden kann. Nach Kap. 7 benötigt man zur Polarisationsmessung mit der Genauigkeit $\Delta s_{\parallel} N_0 = (100 \dots 200) / (\Delta s_{\parallel})^2$ Teilchen. Die genaue Zahl hängt vom betrachteten Zerfallskanal ab. Die Effektivität der Polarisationsmessung an Tauonen ist also mit derjenigen einer Polarisationsmessung an Elektronen mittels Compton-Streuung vergleichbar. Da der Analysestreuprozess entfällt, ist der apparative Aufwand für eine Messung der Polarisation von Tauonen jedoch wesentlich geringer.

In wenigstens einem Punkt hat die Polarisationsmessung von Elektronen gegenüber der von Tauonen einen prinzipiellen Vorteil: Im Gegensatz zur Polarimetrie an Elektronen setzt die Bestimmung der Polarisation an Tauonen voraus, daß die Energie des zu analysierenden Teilchens bekannt ist, ehe der Analyseprozess stattfindet. Andernfalls kann man das Zerfallsspektrum nicht bestimmen, weil bei dem Zerfallsprozess in jedem Fall ein unbeobachtbares Neutrino entsteht. Wegen der kurzen Flugstrecke der Tauonen (einige cm nach (7-11)) scheidet eine direkte Messung des Impulses aus. Man muß also den Impuls aus den Spuren der restlichen Teilchen rekonstruieren, d.h. es ist notwendig, alle übrigen Teilchen des Primärprozesses zu registrieren. Da in letzter Zeit dem Begriff "missing energy" eine wichtige Rolle zukommt – vor allem im Zusammenhang mit der Suche nach supersymmetrischen Teilchen – wird die Nützlichkeit der τ -Polarimetrie im Hinblick auf die Entdeckung neuer Teilchen eingeschränkt.

Zusammengefaßt: Zieht man den apparativen Aufwand in Betracht, so kann derzeit die Polarisationsmessung an Elektronen nicht mit der

Polarimetrie an Tauonen konkurrieren. Andererseits wird sie aber auch nicht durch die Messung der Polarisatión von Tauonen überflüssig.

Anhang A : ÜBER DIE STRUKTUR VON HELIZITÄTSAMPLITUDEN BEI KOLLINEARER KOLLISION

In Anhang A wird das Verhalten von Helizitätszuständen unter einer Reihe von kontinuierlichen und diskreten Raum-Zeit-Symmetrien diskutiert.

In dem Zusammenhang ist es notwendig, verschiedene Darstellungen der Symmetrieoperationen zu unterscheiden: (I) Die Lorentz-Gruppe läßt sich durch die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ der komplexen 2×2 - Matrizen mit Determinante 1 darstellen. Die Elemente dieser Überlagerungsgruppe werden im Normaldruck wiedergegeben: Λ , $L(\mathbf{p})$, etc. (II) Elemente aus der Darstellung der Lorentz-Gruppe durch Transformationen im Koordinatenraum werden durch Schrägdruck kenntlich gemacht: Λ , $L(\mathbf{p})$, etc. (Es ist zu beachten, daß jeweils 2 Matrizen aus der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ auf eine Transformation im Koordinatenraum abgebildet werden.) (III) Schließlich wird die Lorentz-Gruppe durch Operatoren im Raum der Teilchenzustände repräsentiert. Gruppenelemente dieser Darstellung werden durch eine Tilde gekennzeichnet: $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{L}(\mathbf{p})$, $\tilde{P}$, etc.

A.1. Verhalten von Helizitätszuständen unter kontinuierlichen Lorentz-Transformationen: massive Teilchen ($m \neq 0$)

A.1.1. Definition von Helizitätszuständen

Helizitätszustände konstruiert man üblicherweise [22,24,23] auf die folgende Art: Man geht aus von einem ruhenden Teilchen mit Masse m und Spin s , charakterisiert durch den Zustandsvektor $|\overset{\circ}{p}, \lambda\rangle$. $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$ bezeichnet den Viererimpuls im Ruhesystem. Die Spinprojektion λ in Richtung der z-Achse kann die Werte $\lambda = +s, \dots, -s$ annehmen. Einen eindeutig bestimmten Zustand $|\underset{\circ}{p}, \lambda\rangle$ mit Helizität λ und Viererimpuls $\underset{\circ}{p} = (E, \mathbf{p})$ erhält man aus dem Zustandsvektor $|\overset{\circ}{p}, \lambda\rangle$

durch Anwenden der Wigner-Transformation $\tilde{L}(\mathbf{p})$ [22,24,23].

$$|p, \lambda\rangle \equiv \tilde{L}(\mathbf{p}) |\overset{\circ}{p}, \lambda\rangle. \quad (\text{A-1})$$

$\tilde{L}(\mathbf{p})$ setzt sich zusammen aus einer drehungsfreien Lorentz-Transformation $B_z(|\mathbf{p}|)$ in Richtung der positiven z-Achse, wodurch das Teilchen einen Impuls $|\mathbf{p}|$ erhält, und einer darauffolgenden Drehung $R_{\mathbf{n}}(\theta)$, welche die z-Achse in die Richtung von

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}| (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \equiv \{|\mathbf{p}|, \theta, \phi\} \quad (\text{A-1a})$$

dreht. Die Drehung $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ erfolgt um die Achse

$$\mathbf{n} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0), \quad (\text{A-1b})$$

d.h. um den Normalenvektor zu der von z-Achse und Impulsvektor $\mathbf{p}$ festgelegten Ebene. Der Drehwinkel ist θ . (Vgl. Abb. 2 - 1 im Hauptteil.) Dieselbe Wigner-Transformation erhält man, wenn das Teilchen zuerst mit Hilfe von $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ gedreht und danach in Richtung $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ mittels $B_{\hat{\mathbf{p}}}(|\mathbf{p}|)$ beschleunigt wird. Man kann also für $L(\mathbf{p})$ (und entsprechend für $L(\mathbf{p})$) schreiben:

$$L(\mathbf{p}) = R_{\mathbf{n}}(\theta) B_z(|\mathbf{p}|) = B_{\hat{\mathbf{p}}}(|\mathbf{p}|) R_{\mathbf{n}}(\theta) \quad (\text{A-2})$$

mit $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$.

Die durch (A-2) erzeugten Helizitätzustände zum Impuls $\mathbf{p}$ sind eindeutig solange $\hat{\mathbf{p}}$ nicht in Richtung der negativen z-Achse zeigt. Für $\mathbf{p}_{-z} = (0, 0, -|\mathbf{p}|)$, d.h. für $\theta = \pi$ liefert (A-2) vom Azimutwinkel ϕ abhängige Zustände. Eindeutigkeit und Konsistenz erzielt man durch die Vorschrift $\phi = \pi$ [23]

$$\mathbf{p}_{-z} = (0, 0, -|\mathbf{p}_{-z}|) \equiv \{|\mathbf{p}_{-z}|, \pi, \pi\}. \quad (\text{A-2a})$$

Auf diese Weise werden Zustandsübergänge in die entgegengesetzte Richtung stets durch die Substitution $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \pi + \phi$ bewirkt.

A.1.2. Helizitätszustände unter beliebigen Lorentz-Transformationen Λ

Bei Anwendung einer beliebigen Lorentz-Transformation Λ geht der Impuls p in den Impuls $p' = \Lambda p$ über. Die Teilchenzustände $|p, \lambda\rangle$ transformieren sich untereinander gemäß einer unitären Darstellung der Lorentz-Gruppe [24,23].

$$\tilde{\Lambda} |p, \lambda\rangle = \sum_{\lambda'} |p', \lambda'\rangle D_{\lambda', \lambda}^{(s)} (L^{-1}(p') \wedge L(p)) . \quad (\text{A-3a})$$

Die Drehmatrizen $D^{(s)}$ bilden eine irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe $SU(2)$, der "kleinen Gruppe" der Lorentz-Transformationen massiver Teilchen. Die Produktoperation

$$R_W \equiv L^{-1}(p') \wedge L(p) \quad (\text{A-3b})$$

im Argument von $D^{(s)}$ dreht das Teilchen in seinem Ruhssystem und wird als Wigner-Rotation bezeichnet. Während jede der Operationen $L(p)$, $\wedge$ und $L^{-1}(p')$ im allgemeinen nicht unitär ist, gehört die Produktoperation zur Gruppe $SU(2)$.

(A-3a) ist äquivalent zu

$$\tilde{\Lambda} a^+(p, \lambda) \tilde{\Lambda}^{-1} = \sum_{\lambda'} a^+(p', \lambda') D_{\lambda', \lambda}^{(s)} (L^{-1}(p') \wedge L(p)) , \quad (\text{A-4})$$

wobei $a^+(p, \lambda)$ der Erzeugungsoperator für den Zustand $|p, \lambda\rangle$ aus dem Vakuum ist.

Beweis von (A-4) für Spin-1/2-Teilchen

Die Beziehung (A-3a) bzw. (A-4) läßt sich aus dem Transformationsverhalten von Feldoperator $\psi(x)$ und Wellenfunktion $u(p, \lambda)$ ableiten. Das soll für Spin-1/2-Teilchen anhand der Dirac-Spinoren in der Darstellung von [16] demonstriert werden.

Man verwendet die Zerlegung des Feldoperators $\psi(x)$ in Erzeugungsoperatoren $d^+(p, N)$ für Positronen und Vernichtungsoperatoren $b(p, N)$ für Elektronen. p bezeichnet den 4-Impuls der Teilchen, $N = 2\lambda$ mit $\lambda = \pm 1/2$ ihren Helizitätsindex.

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} p_0} \sum_{N=\pm 1} \left[b(p, N) u^{(+1)}(p, N) e^{-ipx} + d^+(p, N) u^{(-1)}(p, N) e^{ipx} \right] \quad (A-5)$$

(Für (A-5) siehe z.B. [83]. Die Operatoren b und d in (A-5) weichen in der Normierung ab von den Operatoren b_{BD} und d_{BD} aus [83]. Es besteht der Zusammenhang $b(p, N) = (mE)^{1/2} b_{BD}(p, N)$.) Die Wellenfunktionen $u^{(Q)}(p, N)$ für Elektronen ($Q = +1$) und Positronen ($Q = -1$) erhält man aus den Ruhssystem-Bispinoren

$$u^{(Q)}(\overset{\circ}{p}, N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_{QN} \\ Q \chi_{QN} \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A-6)$$

durch Anwenden der oben beschriebenen Wigner-Transformation $L(p)$ auf die Spinoren χ_{QN} . Es gilt (siehe z.B. [16])

$$\begin{aligned} u^{(Q)}(p, N) &= S(L(p)) u^{(Q)}(\overset{\circ}{p}, N) \\ &= \begin{pmatrix} R_{\mathbf{a}}(\theta) B_z(|\mathbf{p}|) & 0 \\ 0 & [R_{\mathbf{a}}(\theta) B_z(|\mathbf{p}|)]^{-1+} \end{pmatrix} u^{(Q)}(\overset{\circ}{p}, N). \end{aligned} \quad (A-7)$$

$S(L(p))$ beschreibt die Transformation der Bispinoren $u^{(Q)}(\overset{\circ}{p}, N)$ unter der Wigner-Transformation $L(p)$. Für beliebige Lorentz-Transformationen Λ setzt sich $S(\Lambda)$ aus den Matrizen Λ der Spinordarstellung $SL(2, C)$ der Lorentz-Gruppe zusammen:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1+} \end{pmatrix} . \quad (\text{A-8})$$

Der Feldoperator für Dirac-Teilchen transformiert sich unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$\tilde{\Lambda} \psi(x) \tilde{\Lambda}^{-1} = S(\Lambda^{-1}) \psi(\Lambda x) \quad (\text{A-9})$$

[83]. Setzt man in (A-9) die Entwicklung (A-5) ein, so erhält man für die linke Seite der Gleichung den Ausdruck

$$\tilde{\Lambda} \psi(x) \tilde{\Lambda}^{-1} = \quad (\text{A-10})$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} p_0} \sum_{N=\pm 1} \left[\tilde{\Lambda} b(p, N) \tilde{\Lambda}^{-1} u^{(+1)}(p, N) e^{-ipx} + \tilde{\Lambda} d^+(p, N) \tilde{\Lambda}^{-1} u^{(-1)}(p, N) e^{ipx} \right] .$$

Die rechte Seite von (A-9) wird mit Hilfe von (A-6) durch Substitution im Integranden ($p' = \Lambda p$) und auf Grund der Invarianz des Integrationsmaßes $d^3 p/E$ sowie des Skalarproduktes zu

$$S(\Lambda^{-1}) \psi(\Lambda x) = \quad (\text{A-11})$$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3/2} p'_0} \sum_{N=\pm 1} \left[b(p', N) S(\Lambda^{-1}) u^{(+1)}(p', N) e^{-ip' \Lambda x} + d^+(p', N) S(\Lambda^{-1}) u^{(-1)}(p', N) e^{ip' \Lambda x} \right]$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} p_0} \sum_{N=\pm 1} \left[b(p', N) S(L(p)) \times S(L^{-1}(p) \Lambda^{-1} L(p')) u^{(+1)}(\overset{\circ}{p}, N) e^{-ipx} \right]$$

$$+ d^+(p', N) S(L(p)) \\ \times S(L^{-1}(p) \wedge^{-1} L(p')) u^{(-1)}(p, N) e^{ipx} \Big] .$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern lassen sich weiter umformen. R_W ist als Darstellungsmatrix einer reinen Rotation unitär. Daher gilt die Beziehung

$$R_W = R_W^{-1+} . \quad (A-12a)$$

Wegen der Unimodularität $\det(R_W) = 1$ erhält man daraus

$$R_W = \begin{pmatrix} (R_W)_{++} & (R_W)_{+-} \\ (R_W)_{-+} & (R_W)_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_W)_{++} & (R_W)_{+-} \\ -(R_W)_{+-}^* & (R_W)_{++}^* \end{pmatrix} . \quad (A-12b)$$

Folglich wird $S(R_W)$ mit (A-8) zu

$$S(R_W) = \begin{pmatrix} R_W & 0 \\ 0 & R_W \end{pmatrix} . \quad (A-12c)$$

Mit (A-12c) und (A-12b) erhält man unter expliziter Nutzung von (A-6)

$$S(R_W) u^{(Q)}(p, N) = \sum_{M=\pm 1} (R_W)_{QM, QN} u^{(Q)}(p, M) . \quad (A-13)$$

Damit wird (A-11) zu

$$S(\wedge^{-1}) \psi(\wedge x) = \\ = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} p_0} \sum_{M, N=\pm 1} \left[b(p', N) (R_W^{-1})_{M, N} u^{(+1)}(p, M) e^{-ipx} \right. \\ \left. + d^+(p', N) (R_W^{-1})_{-M, -N} u^{(-1)}(p, M) e^{ipx} \right]$$

(A-12a) liefert $(R_W^{-1})_{M, N} = (R_W)_{N, M}^*$ und somit

$$S(\Lambda^{-1}) \psi(\Lambda x) = \quad (A-14)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{p_0} \sum_{M=\pm 1} \left[\left(\sum_{N=\pm 1} b(\Lambda p, N) (R_W)_{N,M}^* \right) u^{(+1)}(p, M) e^{-ipx} \right. \\ \left. + \left(\sum_{N=\pm 1} d^+(\Lambda p, N) (R_W)_{-N, -M}^* \right) u^{(-1)}(p, M) e^{ipx} \right] .$$

Ein Vergleich mit der linken Seite von (A-9), also mit (A-10), ergibt unter Verwendung der aus (A-12b) zu entnehmenden Beziehung

$$(R_W)_{-N, -M}^* = N \cdot M \cdot (R_W)_{N, M}$$

die beiden Relationen

$$\tilde{\Lambda} b^+(p, M) \tilde{\Lambda}^{-1} = \sum_{N=\pm 1} b^+(\Lambda p, N) (R_W)_{N, M} , \quad (A-15a)$$

$$\tilde{\Lambda} M d^+(p, M) \tilde{\Lambda}^{-1} = \sum_{N=\pm 1} d^+(\Lambda p, N) N (R_W)_{N, M} . \quad (A-15b)$$

Damit ist (A-4) für Spin-1/2-Teilchen bestätigt, denn die Darstellungsmatrix $D^{(1/2)}(R_W)$ ist identisch mit der $SU(2)$ -Matrix R_W [23]. (Der Faktor N in (A-15b) kann in die Definition des Antiteilchen - Erzeugungsoperators $d^+(p, N)$ eingeschlossen werden. Er tritt auf als Folge der Phasenwahl der Bispinoren: Nach Fußnote 22 in [16] enthält die Wellenfunktion eines Positrons mit negativer Helizität ein von der üblichen Definition abweichendes Minuszeichen. Der Faktor N kompensiert dieses.)

Zerlegung von Λ

Das Transformationsverhalten von Helizitätszuständen wird durch die Wigner-Rotation R_W (s. (A-3b)) in den Gln. (A-4) bzw. (A-15a,b) festgelegt. R_W hängt im allgemeinen sowohl von der Transformation Λ als auch von den Impulsen der Teilchen vor und nach der Transformation

ab.

Die Wigner-Rotation R_W für eine beliebige Lorentz-Transformation Λ kann man zusammensetzen aus den Wigner-Rotationen für reine Drehungen und aus der Wigner-Rotation für eine drehungsfreie Lorentz-Transformation in z-Richtung: Λ ist als Produkt

$$\Lambda = R_d(\phi) B_l(\alpha) \quad (A-16)$$

aus einer reinen Drehung $R_d(\phi)$ um den Vektor $\mathbf{d}$ und einer drehungsfreien Lorentz-Transformation $B_l(\alpha)$ in Richtung von $\mathbf{l}$ darstellbar (siehe z.B. [23]); $B_l(\alpha)$ wiederum läßt sich mit Hilfe von Drehungen durch eine reine Lorentz-Transformation in z-Richtung ausdrücken. Die einzelnen Operationen werden durch folgende $SL(2, C)$ -Matrizen beschrieben:

$$R_d(\phi) = \sigma_0 \cos(\phi/2) - i \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma} \sin(\phi/2) = e^{-i\phi/2 \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma}}, \quad (A-17)$$

$$B_l(\alpha) = \sigma_0 \cosh(\alpha/2) + \mathbf{l} \boldsymbol{\sigma} \sinh(\alpha/2) = e^{\alpha/2 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}} \quad (A-18)$$

mit der Einheitsmatrix σ_0 und den Pauli-Matrizen σ_x , σ_y und σ_z . Aus (A-17) und (A-18) errechnet man

$$B_l(\alpha) = R_{\mathbf{m}}(\delta) B_z(\alpha) R_{-\mathbf{m}}(\delta). \quad (A-19)$$

Dabei dreht $R_{\mathbf{m}}(\delta)$ die z-Achse in die Richtung von $\mathbf{l}$: Drehachse ist der Vektor $\mathbf{m} = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{l}) / |\mathbf{e}_z \times \mathbf{l}|$, Drehwinkel der Polarwinkel δ des Vektors $\mathbf{l}$ ("Kipp-Drehung").

Infolge der Zusammensetzbarkeit von beliebigen Lorentz-Transformationen aus Rotationen und einer drehungsfreien Lorentz-Transformation in z-Richtung werden diese speziellen Operationen näher behandelt.

A.1.3. Spezialfall: räumliche Drehung

Die Wigner-Rotation für eine beliebig räumliche Drehung $R_d(\phi)$: $\mathbf{p} = \{p, \theta, \phi\} \rightarrow \mathbf{p}' = R_d(\phi) \mathbf{p} = \{p, \theta', \phi'\}$ besteht für jeden Impuls $\mathbf{p}$ aus einer Drehung um die z-Achse. Beweis: Nach (A-3b) und mit (A-2) ist

$$R_W = B_z^{-1}(|\mathbf{p}|) R_{-\mathbf{n}}(\theta') R_d(\phi) R_{\mathbf{n}}(\theta) B_z(|\mathbf{p}|) . \quad (\text{A-20})$$

Die 3 Rotationen auf der rechten Seite von (A-20) führen die z-Achse in sich selbst über, sodaß die Produktoperation einer Drehung $R_z(\phi_W)$ um die z-Achse entspricht. Da $R_z(\phi_W)$ und $B_z(|\mathbf{p}|)$ kommutieren (das läßt sich mit Hilfe von (A-17) und (A-18) zeigen), folgt die Behauptung

$$R_W = R_z(\phi_W) = R_{-\mathbf{n}}(\theta') R_d(\phi) R_{\mathbf{n}}(\theta) . \quad (\text{A-21})$$

Der Drehwinkel ϕ_W muß durch explizite Berechnung von (A-21) mittels (A-17) bestimmt werden. Abgesehen von der Rotation $R_d(\phi)$ geht in den Drehwinkel ϕ_W die Impulsrichtung $\hat{\mathbf{p}}$ ein, denn $\mathbf{p}$ legt die Drehachse $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{p} / |\mathbf{e}_z \times \mathbf{p}|$ und den Drehwinkel θ (= Polarwinkel von $\mathbf{p}$) fest. Für einige Spezialfälle ist ϕ_W angegeben (siehe unten).

(A-21) beinhaltet, daß die Helizität eines Zustandes invariant gegenüber räumlichen Drehungen ist. Wegen

$$D_{\lambda', \lambda}^{(s)}(R_z(\phi_W)) = e^{-i\lambda\phi_W} \delta_{\lambda', \lambda} \quad (\text{A-22})$$

(siehe hierfür z.B. [23]) erhält ein gedrehter Zustand nur einen Phasenfaktor (vgl. (A-4)) :

$$\tilde{R}_d(\phi) a^+(p, \lambda) \tilde{R}_d^{-1}(\phi) = e^{-i\lambda\phi_W} a^+(p' = R_d(\phi)p, \lambda) . \quad (\text{A-23})$$

Drehung um die z-Achse: $R_d(\phi) \rightarrow R_z(\phi)$

a) $\mathbf{p} \neq (0, 0, -|\mathbf{p}|)$:

$R_z(\phi)$ führt den Impulsvektor $\mathbf{p} = \{p, \Theta, \Phi\}$ über in den Vektor $\mathbf{p}' = \{p, \Theta, \Phi + \phi\}$. Man erhält aus (A-21)

$$\Phi_W = \phi, \quad (\text{A-24})$$

d.h. die Wigner-Rotation R_W und die Rotation $R_z(\phi)$ stimmen überein.

b) $\mathbf{p} = (0, 0, -|\mathbf{p}|)$:

Wegen der Festlegung $\mathbf{p} = \{p, \pi, \pi\}$ (vgl. (A-2a)) ist $\Theta = \pi$ und $\mathbf{n} = \mathbf{n}' = (0, -1, 0)$. Daraus folgt

$$\Phi_W = -\phi. \quad (\text{A-25})$$

Drehung um 180° um die y-Achse : $R_d(\phi) \rightarrow R_y(\pi)$

$R_y(\pi)$ führt $\mathbf{p} = \{p, \Theta, \Phi\}$ über in $\mathbf{p}' = R_y(\pi)\mathbf{p} = \{p, \pi - \Theta, \pi - \Phi\}$. Man erhält aus (A-21)

$$\Phi_W = 2\pi - 2\phi \quad (\text{A-26})$$

und damit (vgl. (A-22))

$$D_{\lambda', \lambda}^{(s)}(R_W) = e^{-i\lambda(2\pi - 2\phi)} \delta_{\lambda', \lambda} = (-1)^{2s} e^{i2\lambda\phi} \delta_{\lambda', \lambda}. \quad (\text{A-27})$$

A.1.4. Spezialfall: drehungsfreie Lorentz-Transformation in z-Richtung

Gegeben seien ein Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$ und eine drehungsfreie Lorentz-Transformation $B_z(\alpha)$:

$$\begin{aligned} p &= (E, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p}_\perp + p_z \mathbf{e}_z) \\ &\longrightarrow p' = B_z(\alpha) p = (E', \mathbf{p}_\perp + p'_z \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

mit

$$\begin{aligned} E' &= E \cosh \alpha + p_z \sinh \alpha, \\ p'_z &= E \sinh \alpha + p_z \cosh \alpha. \end{aligned}$$

Den Wigner-Operator R_W für $B_z(\alpha)$ erhält man aus (A-20) durch die Ersetzung $R_d(\phi) \rightarrow B_z(\alpha)$:

$$\begin{aligned} R_W &= B_z^{-1}(|\mathbf{p}|) R_{-\mathbf{n}'}(\Theta') B_z(\alpha) R_{\mathbf{n}}(\Theta) B_z(|\mathbf{p}|) \\ &\equiv R_{\mathbf{n}}(\phi_W), \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

mit $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$. Die Drehachse für die Rotation R_W bildet der Vektor

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{p}}{|\mathbf{e}_z \times \mathbf{p}|}. \quad (\text{A-30})$$

Beweis: Die räumliche Komponente eines Vierervektors der Form $(n_0, \mathbf{n})$ wird von keiner der Transformationen in (A-29) – aufgefaßt als Transformationen im Koordinatenraum – beeinflusst: Der Geschwindigkeitsvektor der reinen Lorentz-Transformation $B_z(\alpha)$ steht senkrecht auf $\mathbf{n}$; für die anschließende Rotation $R_{\mathbf{n}}(\Theta)$ ist $\mathbf{n}$ die Drehachse; usw. Damit wird $(n_0, \mathbf{n})$ in sich selbst übergeführt und die Behauptung ist bewiesen.

ϕ_W hängt von Betrag und Richtung des Impulsvektors $\mathbf{p}$ ab. Mit Hilfe von (A-29) und der expliziten Gestalt der Matrizen (A-17) und (A-18) läßt sich ϕ_W berechnen. Für eine drehungsfreie Lorentz-Transformation in Richtung der positiven z-Achse ($\alpha > 0$) und ein Teilchen mit Impuls

$\mathbf{p} = (0, 0, \pm |\mathbf{p}|)$ erhält man die folgenden Resultate.

a) $\mathbf{p} = (0, 0, |\mathbf{p}|)$:

Es ist

$$R_W = 1, \text{ d.h. } \Phi_W = 0. \quad (\text{A-31})$$

b) $\mathbf{p} = (0, 0, -|\mathbf{p}|)$:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

i) Das Teilchen wird abgebremst, fliegt aber weiterhin in Richtung der negativen z-Achse. Hier bleibt (A-31) gültig.

ii) Die Impulsrichtung des Teilchens dreht sich um. In diesem Fall ist

$$R_W = i\sigma_y = R_n(\pi), \text{ d.h. } \Phi_W = \pi, \quad (\text{A-32})$$

mit $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$ wegen $\mathbf{p} = \{p, \pi, \pi\}$. Die Wigner-Rotation ändert somit das Vorzeichen der Helizität eines Zustandes, denn es gilt

$$D_{\lambda', \lambda}^{(s)}(i\sigma_y) = \delta_{\lambda', -\lambda} (-1)^{s+\lambda} \quad (\text{A-33})$$

(siehe z.B. [23]). Bis auf den Phasenfaktor ist (A-33) leicht einzusehen: Da durch die Lorentz-Transformation die Impulsrichtung umgedreht wird, der Drehimpuls jedoch unverändert bleibt, ändert die Helizität das Vorzeichen.

A.2. Verhalten von Helizitätszuständen unter kontinuierlichen Lorentz-Transformationen: masselose Teilchen ($m = 0$)

A.2.1. Definition von Helizitätszuständen

Masselose Teilchen mit Spin s besitzen unter der Voraussetzung von Paritätsinvarianz genau zwei Helizitätszustände: $\lambda = +s$ und $\lambda = -s$.

Helizitätszustände mit beliebigem Impuls $k = (k_0, \mathbf{k}) = k_0 (1, \hat{\mathbf{k}})$, $|\hat{\mathbf{k}}| = 1$, lassen sich aus den beiden Zuständen eines Teilchens mit Standardimpuls $\hat{k} = k_c(1, 0, 0, 1)$ durch Lorentz-Transformation erzeugen (k_c ist eine frei wählbare und dann festzuhaltende Energiegröße). Wie im Fall masseloser Teilchen benötigt man zur Erzeugung eines Teilchenzustandes $|k, \lambda\rangle$ eine eindeutige Vorschrift, den Wigner-Operator $L(\mathbf{k})$.

$$|k, \lambda\rangle \equiv \tilde{L}(\mathbf{k}) |\hat{k}, \lambda\rangle . \quad (\text{A-34})$$

Die Definition von $L(\mathbf{k})$,

$$L(\mathbf{k}) = R_n(\theta) B_z(|\mathbf{k}|) , \quad (\text{A-35})$$

stimmt mit derjenigen für massive Teilchen aus (A-1) überein. Die Gln. (A-1a) und (A-2a) können übernommen werden. (Es ist $\mathbf{p}$ durch $\mathbf{k}$ zu ersetzen. $B_z(|\mathbf{k}|)$ bezeichnet die drehungsfreie Lorentz-Transformation, welche $\hat{k} \rightarrow k = k_0(1, 0, 0, 1)$ überführt.)

A.2.2. Helizitätszustände unter beliebigen Lorentz-Transformationen Λ

Das Transformationsverhalten masseloser Teilchen weicht von dem massiver Teilchen in (A-3a) ab. Für $\Lambda: k \rightarrow k' = \Lambda k$ erhält jeder Helizitätszustand einen von k und Λ abhängigen Phasenfaktor (siehe Kap. 4.5 in [23]).

$$\tilde{\Lambda} |k, \lambda\rangle = |k', \lambda\rangle e^{-i\lambda\Theta_W} \quad (A-36a)$$

oder äquivalent dazu

$$\tilde{\Lambda} a^+(k, \lambda) \tilde{\Lambda}^{-1} = a^+(\Lambda k, \lambda) e^{-i\lambda\Theta_W} \quad (A-36b)$$

mit

$$e^{-i\Theta_W/2} = (L^{-1}(\mathbf{k}') \wedge L(\mathbf{k}))_{++} \quad (A-36c)$$

Der Index "++" bezeichnet das Matrixelement in der ersten Zeile und der ersten Spalte der SU(2)-Matrix $L^{-1}(\mathbf{k}') \wedge L(\mathbf{k})$. Ein Vergleich von (A-36a) mit dem Transformationsverhalten massiver Teilchen (Gl. (A-3a) und (A-22)) zeigt, daß ein masseloser Zustand mit Helizität λ unter einer beliebigen Lorentz-Transformation Λ denselben Phasenfaktor erhält wie ein massives Teilchen mit gleicher Helizität bei einer Rotation um die z-Achse mit Drehwinkel $\Phi_W = \Theta_W$ (zur Unterscheidung vom Drehwinkel Φ_W der Wigner-Rotation massiver Teilchen wird der Phasenwinkel masseloser Teilchen mit Θ_W bezeichnet). In diesem Sinne besteht die Wigner-Rotation eines masselosen Teilchens aus der Transformation

$$R_W = R_z(\Theta_W) \quad (A-37)$$

obwohl die "kleine Gruppe" für masselose Teilchen nicht die SU(2) sondern die Gruppe E(2) ist.

A.2.3. Beweis von (A-36a) für Photonen

Gl. (A-36a) tritt in [23] als Folge einer geeigneten Wahl für die Darstellung der "kleinen Gruppe" $E(2)$ des Standardimpulses $\hat{k} = k_c(1, 0, 0, 1)$ masseloser Teilchen auf. Dabei werden die Gruppenoperationen innerhalb der $E(2)$ in Translationen und Rotationen unterteilt. Physikalisch sinnvoll sind nur solche Darstellung, in denen – grob gesprochen – die Translationen in der Gruppe $E(2)$ Null sind.

Im folgenden wird (A-36a) am Beispiel von Photonen auf andere Weise hergeleitet. Es werden die Eigenschaften der Polarisationsvektoren ϵ^μ ausgenutzt. Analog zu Abschnitt A.1.2 für Spin-1/2-Teilchen wird eine Zerlegung des Feldoperators in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^+(k, \lambda)$ und $a(k, \lambda)$ für Photonen mit Impuls k und Helizität $\lambda = \pm 1$ verwendet. Sie ist gegeben durch

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} k_0} \sum_{\lambda = \pm 1} \left[a(p, \lambda) \epsilon^\mu(k, \lambda) e^{-ikx} + \text{hermitesch conj.} \right]. \quad (\text{A-38})$$

(Siehe z.B. [83]. Die Operatoren a_{BD} in [83] unterscheiden sich von den hier verwendeten um einen Faktor. Es gilt $a = (k_0/2)^{1/2} a_{BD}$.) Der Polarisationsvektor $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ in Coulomb-Eichung für ein Photon mit Impuls $k = k_0(1, \hat{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ hängt nur von $\hat{k}$, nicht von k_0 ab. $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ läßt sich aus dem Polarisationsvektor

$$\epsilon^\mu(k_z, \lambda) = 1/\sqrt{2} (0, -\lambda, -i, 0) \quad (\text{A-39})$$

eines Photons mit Impuls $k_z = k_0(1, \mathbf{e}_z)$ durch Drehung erzeugen. Denn durch explizite Berechnung zeigt man, daß

$$\epsilon^\mu(k, \lambda) \equiv [R_n(\Theta)]^\mu_\nu \epsilon^\nu(k_z, \lambda) \quad (\text{A-40})$$

der Polarisationsvektor eines Photons mit Impuls k in der von Anders und Jachmann [16] angegebenen Form ist. Dabei ist die Drehmatrix

$R_{\mathbf{n}}(\theta)$ eine Darstellung im Koordinatenraum der $SU(2)$ -Drehmatrix $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ aus Abschnitt A.1.1 (siehe Gl. (A-1) ff.). Die Drehachse $\mathbf{n}$ steht senkrecht auf dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_z$ in z -Richtung. Durch die Drehung wird $\mathbf{e}_z$ in die Impulsrichtung $\hat{\mathbf{k}} = \{1, \theta, \phi\}$ gedreht. $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ hat die explizite Gestalt

$$[R_{\mathbf{n}}(\theta)]^{\mu}_{\nu} = \quad (A-41)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta \cos^2\phi + \sin^2\phi & \cos\theta \cos\phi \sin\phi - \cos\phi \sin\phi & \sin\theta \cos\phi \\ 0 & \cos\theta \sin\phi \cos\phi - \cos\phi \sin\phi & \cos\theta \sin^2\phi + \cos^2\phi & \sin\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\theta \cos\phi & -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Da $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ nur auf die räumlichen Komponenten eines Vierervektors wirkt, verschwindet $\varepsilon^0(k, \lambda)$ als Folge von (A-39) identisch (Coulomb-Eichung).

Das quantisierte Vektorpotential A^{μ} transformiert sich unter der Lorentz-Transformation $\tilde{\Lambda}$ wie folgt (siehe z.B. [83]) :

$$\tilde{\Lambda} A^{\mu}(x) \tilde{\Lambda}^{-1} = \Lambda^{-1}{}^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda x) + \partial^{\mu} \chi_{\Lambda}(\Lambda x). \quad (A-42)$$

Im Unterschied zu [83] ist auf der rechten Seite der Gl. (A-42) der Eichterm $\partial^{\mu} \chi_{\Lambda}(\Lambda x)$ addiert. Er liefert das transformierte Feld

$$A'^{\mu}(x) = \tilde{\Lambda} A^{\mu}(x) \tilde{\Lambda}^{-1}$$

in der Coulomb-Eichung, d.h. er eliminiert die Komponente $A'^0(x)$. Mit Hilfe einer Fourier-Zerlegung kann man $\chi_{\Lambda}(x)$ bestimmen.

$$\chi_{\Lambda}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} k_0} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[a(k, \lambda) \frac{[\Lambda^{-1}]^0_{\nu} \varepsilon^{\nu}(k, \lambda)}{i [\Lambda^{-1}]^0_{\nu} k^{\nu}} e^{-ikx} + \text{hermitesch conj.} \right]. \quad (\text{A-43})$$

Einsetzen von (A-38) in die linke Seite von (A-42) ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} A^{\mu}(x) \tilde{\Lambda}^{-1} &= \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} k_0} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[\tilde{\Lambda} a(k, \lambda) \tilde{\Lambda}^{-1} \varepsilon^{\mu}(k, \lambda) e^{-ikx} + \text{hermitesch conj.} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-44})$$

Für die rechte Seite von (A-42) erhält man mit Hilfe der Entwicklungen (A-38) und (A-43) sowie unter Ausnutzung von $k' = \Lambda k$ und der Invarianz des Skalarproduktes die Gleichung

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1 \mu}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda x) + \partial^{\mu} \chi_{\Lambda}(\Lambda x) &= \\ &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2} k'_0} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[a(k', \lambda) \left\{ [\Lambda^{-1}]^{\mu}_{\nu} \varepsilon^{\nu}(k', \lambda) + \frac{[\Lambda^{-1}]^0_{\nu} \varepsilon^{\nu}(k', \lambda)}{i [\Lambda^{-1}]^0_{\nu} k'^{\nu}} (-ik)^{\mu} \right\} e^{-ikx} + \text{h.k.} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} k_0} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[a(\Lambda k, \lambda) \left\{ E^{\nu}(k, \lambda) e^{-ikx} + \text{h.k.} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-45})$$

Der letzte Ausdruck in (A-45) ist eine Folge der Lorentz-Invarianz von d^3k/k_0 . E^{μ} ist eine Abkürzung für

$$E^\mu(k, \lambda) = [\Lambda^{-1}]^\mu{}_\nu \epsilon^\nu(\Lambda k, \lambda) - \frac{k^\mu}{k_0} [\Lambda^{-1}]^0{}_\nu \epsilon^\nu(\Lambda k, \lambda). \quad (\text{A-46})$$

Um das Transformationsverhalten (A-36b) aus einem Vergleich von (A-44) und (A-45) bestimmen zu können, muß man $E^\mu(k, \lambda)$ durch $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ ausdrücken. Es genügt die Spezialfälle "reine Drehung" und "drehungsfreie Lorentz-Transformation in Richtung der z-Achse" zu betrachten. Nach (A-16) und (A-19) läßt sich daraus eine beliebige Lorentz-Transformation Λ zusammensetzen.

Spezialfall: räumliche Drehung

Für eine beliebige räumliche Drehung $\Lambda = R_d(\phi)$ verschwindet die 0-te Komponente von $\Lambda^{-1} \epsilon = R_d^{-1}(\phi) \epsilon = R_{-d}(\phi) \epsilon$ und damit der Eich-term im (A-46). Mit (A-40) wird (A-46) zu

$$\begin{aligned} E^\mu(k, \lambda) &= R_d^{-1}(\phi)^\mu{}_\nu \epsilon^\nu(k' = R_d(\phi)k, \lambda) \\ &= R_d^{-1}(\phi)^\mu{}_\nu R_{\mathbf{n}'}(\Theta')^\nu{}_\sigma \epsilon^\sigma(k_z, \lambda) \\ &= R_{\mathbf{n}}(\Theta)^\mu{}_\nu [R_{-\mathbf{n}'}(\Theta') R_d(\phi) R_{\mathbf{n}}(\Theta)]^{-1}{}^\nu{}_\sigma \epsilon^\sigma(k_z, \lambda). \end{aligned} \quad (\text{A-47})$$

$\hat{\mathbf{k}}' = \{1, \Theta', \Phi'\}$ bezeichnet die Impulsrichtung des Teilchens nach der Drehung $R_d(\phi)$. Das Produkt von Rotationen in der eckigen Klammer [...] ist eine Drehung $R_z(\Phi_W)$ um die z-Achse mit Drehwinkel Φ_W (vgl. Abschnitt A.1.3, Herleitung von (A-21)). Die Matrix $R_z^{-1}(\Phi_W)$ ist gegeben durch

$$R_z^{-1}(\Phi_W) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi_W & \sin\Phi_W & 0 \\ 0 & -\sin\Phi_W & \cos\Phi_W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A-48})$$

Mit (A-48) beweist man für $\varepsilon^\mu(k_z, \lambda)$ aus (A-39) die Gültigkeit von

$$R_z^{-1}(\Phi_W)^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(k_z, \lambda) = e^{i\Phi_W \lambda} \varepsilon^\mu(k_z, \lambda) . \quad (\text{A-49})$$

Aus (A-47) wird damit

$$\begin{aligned} E^\mu(k, \lambda) &= R_n(\Theta)^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu(k_z, \lambda) e^{i\Phi_W \lambda} \\ &= e^{i\Phi_W \lambda} \varepsilon^\mu(k, \lambda) . \end{aligned} \quad (\text{A-50})$$

Ein Vergleich von (A-44) mit (A-45) ergibt nun

$$\tilde{\Lambda} a^+(k, \lambda) \tilde{\Lambda}^{-1} = e^{-i\Phi_W \lambda} a^+(R_d(\phi)k, \lambda) . \quad (\text{A-51})$$

Damit ist (A-36b) für räumliche Drehungen bewiesen, denn in dem Fall wird die rechte Seite von (A-36c) mit (A-22) zu

$$(L^{-1}(\mathbf{k}') R_d(\phi) L(\mathbf{k}))_{++} = (R_z(\Phi_W))_{++} = e^{-i\Phi_W/2}$$

Es ist also

$$\Theta_W = \Phi_W , \quad (\text{A-52})$$

d.h. für eine beliebige räumliche Drehung stimmt der Phasenwinkel Θ_W für masselose Teilchen mit dem Drehwinkel Φ_W der Wigner-Rotation eines massiven Teilchens (vgl. Abschnitt A.1.3) überein.

Spezialfall: drehungsfrei

Lorentz-Transformation längs der positiven z-Achse

Für $\Lambda = B_z(\alpha)$ kann man zeigen, daß für beliebige Impulse $k = k_0(1, \hat{\mathbf{k}})$ der Vektor $E^\mu(k, \lambda)$ aus (A-46) identisch mit $\varepsilon^\mu(k, \lambda)$ ist:

$$E^\mu(k, \lambda) = \varepsilon^\mu(k, \lambda) . \quad (\text{A-53})$$

Der etwas mühsamen Beweis von (A-53) wird hier nicht vorgerechnet. Man erhält ihn durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke für $\varepsilon^\mu(k, \lambda)$

und $B_z(\alpha)$ in die rechte Seite von (A-46).

Ein Vergleich von (A-44) und (A-45) unter Ausnutzung von (A-53) ergibt

$$\tilde{B}_z(\alpha) a^+(k, \lambda) \tilde{B}_z^{-1}(\alpha) = a^+(B_z(\alpha)k, \lambda) . \quad (\text{A-54})$$

Damit ist (A-36b) auch für den Fall einer reinen Lorentz-Transformation längs der z-Achse bewiesen, denn aus einer expliziten (und längeren) Rechnung erhält man mit Hilfe von (A-35), (A-17) und (A-18) für den Phasenfaktor (A-36c) den Wert

$$e^{-i\Theta_W/2} = 1 . \quad (\text{A-55})$$

A.3. Verhalten von Einteilchen-Helizitätzuständen unter diskreten Symmetrioperationen

Das Transformationsverhalten von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren unter diskreten Symmetrioperationen hängt von der Definition der Phasen der Teilchen- und Antiteilchenzustände ab. Die folgenden Gleichungen enthalten zunächst unbestimmte Phasenfaktoren K_C , $\bar{K}_C$, ..., die in verschiedenen Arbeiten [22,23,24,16] unterschiedliche Werte annehmen und weiter unten spezifiziert werden.

Unter Ladungskonjugation C transformieren sich die Erzeugungsoperatoren $a^+(\mathbf{p}, \lambda)$ für Teilchen und $b^+(\mathbf{p}, \lambda)$ für Antiteilchen mit Impuls $\mathbf{p} = \{p, \theta, \phi\}$ (bei der Behandlung diskreter Symmetrien genügt es den räumlichen Anteil des Impulse zu betrachten) und Helizität λ gemäß

$$\tilde{C} a^+(\mathbf{p}, \lambda) \tilde{C}^{-1} = K_C b^+(\mathbf{p}, \lambda) , \quad (\text{A-56a})$$

$$\tilde{C} b^+(\mathbf{p}, \lambda) \tilde{C}^{-1} = \bar{K}_C a^+(\mathbf{p}, \lambda) . \quad (\text{A-56b})$$

Die Paritätsoperation $\tilde{P}$ verknüpft Teilchenzustände mit Impuls $\mathbf{p} = \{p, \Theta, \Phi\}$ und $\mathbf{p}' = P\mathbf{p} = -\mathbf{p}$. Hier und im folgenden ist unter dem Vektor $-\mathbf{p}$ immer das Zahlentripel $\{p, \pi-\Theta, \Phi+\pi\}$ zu verstehen. Das Teilchen habe Spin s . Dann gilt:

$$\tilde{P} a^+(\mathbf{p}, \lambda) \tilde{P}^{-1} = K_P (-1)^{s-\lambda} e^{i2\lambda\Phi} a^+(-\mathbf{p}, -\lambda) , \quad (\text{A-57a})$$

$$\tilde{P} b^+(\mathbf{p}, \lambda) \tilde{P}^{-1} = \bar{K}_P (-1)^{s-\lambda} e^{i2\lambda\Phi} b^+(-\mathbf{p}, -\lambda) . \quad (\text{A-57b})$$

Der antiunitäre Zeitumkehroperator $\tilde{T}$ transformiert die Erzeugungsoperatoren $a^+(\mathbf{p}, \lambda)$ und $b^+(\mathbf{p}, \lambda)$ gemäß

$$\tilde{T} a^+(\mathbf{p}, \lambda) \tilde{T}^{-1} = K_T e^{-i2\lambda\Phi} a^+(-\mathbf{p}, \lambda) , \quad (\text{A-58a})$$

$$\tilde{T} b^+(\mathbf{p}, \lambda) \tilde{T}^{-1} = \bar{K}_T e^{-i2\lambda\Phi} b^+(-\mathbf{p}, \lambda) . \quad (\text{A-58b})$$

Wenn man die Phasen aus [23] übernimmt, erhält man folgende konkrete Darstellung der Phasenfaktoren

$$\begin{aligned} K_C &= \eta_C^* , & \bar{K}_C &= \bar{\eta}_C^* = \eta_C , \\ K_P &= \eta_P^* , & \bar{K}_P &= \bar{\eta}_P^* = \eta_P (-1)^{2s} = \eta_P^* , \\ K_T &= \eta_T^* (-1)^{2s} , & \bar{K}_T &= \bar{\eta}_T^* (-1)^{2s} . \end{aligned} \quad (\text{A-59})$$

Hierbei ist η_C die Ladungsparität des Teilchen, η_P seine innere Parität. η_T ist durch die Bedingung $\eta_T \eta_P \eta_C = 1$ festgelegt.

Um die Gleichungen (A-56a) bis (A-58b) abzuleiten und die Phasen K_C , K_P , etc. für die Konvention in [16] zu finden, kann man wie in Abschnitten A.1.2 und A.2.3 vorgehen. Man setzt die Entwicklungen (A-5) bzw. (A-38) der Feldoperatoren $\psi(x)$ bzw. $A^\mu(x)$ nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in die Gleichungen für das Transforma-

tionsverhalten der Feldoperatoren ein und nutzt Eigenschaften der Wellenfunktionen $u^{(Q)}(p, N)$ bzw. der Polarisationsvektoren $\varepsilon^\mu(k, \lambda)$ aus.

A.3.1. Dirac-Teilchen

Nach [83] transformiert sich der Feldoperator $\psi(x)$ unter den Operationen $\tilde{P}$, $\tilde{C}$ und $\tilde{T}$ gemäß

$$\tilde{C} \psi(x) \tilde{C}^{-1} = \eta_C i\gamma^2 \psi^\dagger(x), \quad (\text{A-60})$$

$$\tilde{P} \psi(x_0, \mathbf{x}) \tilde{P}^{-1} = \eta_P \gamma^0 \psi(x_0, -\mathbf{x}), \quad (\text{A-61})$$

$$\tilde{T} \psi(x_0, \mathbf{x}) \tilde{T}^{-1} = \eta_T i\gamma^1 \gamma^3 \psi(-x_0, \mathbf{x}). \quad (\text{A-62})$$

Einsetzen der Entwicklung (A-5) in diese Gleichungen ergibt für die Symmetrioperationen im einzelnen die folgenden Beziehungen (nach der Konvention aus [16]):

i) Für die Ladungskonjugation $\tilde{C}$ erhält man unter Verwendung von

$$i\gamma^2 \gamma^0 \bar{u}^{(Q)\dagger}(p, N) = N u^{(-Q)}(p, N) \quad (\text{A-63})$$

die Gleichungen (A-56a,b) mit

$$K_C = 2\lambda \eta_C^* = N \eta_C^*, \quad (\text{A-64a})$$

$$\bar{K}_C = 2\lambda \eta_C = N \eta_C. \quad (\text{A-64b})$$

ii) Die Paritätstransformation $\tilde{P}$ führt wegen

$$\gamma^0 u^{(Q)}(-\mathbf{p}, N) = -N e^{iQN\Phi} u^{(Q)}(\mathbf{p}, -N) \quad (\text{A-65})$$

zu (A-57a,b) mit

$$K_P = \eta_P^* , \quad (A-66a)$$

$$\bar{K}_P = \eta_P . \quad (A-66b)$$

iii) Die Behandlung der Zeitumkehrtransformation $\tilde{T}$ hat als Folge von

$$\gamma^1 \gamma^3 u^{(Q)}(-p, N) = - e^{iQN\Phi} u^{(Q)*}(p, N) \quad (A-67)$$

(A-58a,b) zum Ergebnis. Dabei ist

$$K_T = - \eta_T^* , \quad (A-68a)$$

$$\bar{K}_T = - \eta_T . \quad (A-68b)$$

A.3.2. Photonen

Die räumlichen Komponenten des Vektorpotentials $A^\mu(x)$ transformieren sich auf die folgende Weise [83]:

$$\tilde{C} A(x_o, \mathbf{x}) \tilde{C}^{-1} = - A(x_o, \mathbf{x}) , \quad (A-69)$$

$$\tilde{P} A(x_o, \mathbf{x}) \tilde{P}^{-1} = - A(x_o, -\mathbf{x}) , \quad (A-70)$$

$$\tilde{T} A(x_o, \mathbf{x}) \tilde{T}^{-1} = - A(-x_o, \mathbf{x}) . \quad (A-71)$$

In diese Gleichungen setzt man die Entwicklung (A-38) ein. Als Folge der Relationen

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) = e^{i2\lambda\Phi} \varepsilon^\mu(-\mathbf{k}, -\lambda) , \quad (A-72)$$

$$\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{k}, \lambda) = - \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, -\lambda) , \quad (A-73)$$

$$\varepsilon^{\mu*}(\mathbf{k}, \lambda) = - e^{-i2\lambda\Phi} \varepsilon^{\mu}(-\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{A-74})$$

ergeben sich die Beziehungen (A-56a), (A-57a) und (A-58a) (Teilchen und Antiteilchen sind identisch). Für die Phasenfaktoren erhält man:

$$K_C = -1 \quad \text{in Gl. (A-56a),} \quad (\text{A-75})$$

$$K_P = -1 \quad \text{in Gl. (A-57a),} \quad (\text{A-76})$$

$$K_T = 1 \quad \text{in Gl. (A-58a).} \quad (\text{A-77})$$

A.4. Transformationsverhalten von Helizitätsamplituden für kollinear einfallenden Teilchen

Im folgenden soll ein Teilchenzustand mit Impuls $\mathbf{p}$ und Helizität λ entweder in der Form $|\mathbf{p}, \lambda\rangle$ oder durch $|\mathbf{p}, \theta, \phi, \lambda\rangle$ beschrieben werden. θ und ϕ charakterisieren die Richtung des Impulsvektors (vgl. Abb. 2-1). Der Zustand $|\mathbf{p}, \lambda\rangle$ ist immer identisch mit $|\mathbf{p}, \pi - \theta, \pi + \phi, \lambda\rangle$. Die einfallenden Teilchen kollidieren kollinear. Sie werden durch Zustandsvektoren $|\mathbf{p}_1, \lambda_1\rangle = |\mathbf{p}_1, 0, 0, \lambda_1\rangle$ (Bewegung längs der positiven z-Achse) und $|\mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle = |\mathbf{p}_1, \pi, \pi, \lambda_2\rangle$ (Flugrichtung längs der negativen z-Achse) beschrieben. Der Vektor $|\mathbf{p}_1, \lambda_1\rangle$ steht demnach für $|\mathbf{p}_1, \pi, \pi, \lambda_1\rangle$; ferner gilt $|\mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle = |\mathbf{p}_2, 0, 2\pi, \lambda_2\rangle = |\mathbf{p}_2, 0, 0, \lambda_2\rangle$. Antiteilchen werden durch einen Querstrich markiert: $|\overline{\mathbf{p}}, \lambda\rangle$.

Das Verhalten von Helizitätsamplituden

$$\langle \mathbf{p}_3, \lambda_3 ; \mathbf{p}_4, \lambda_4 ; \dots \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1 ; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \quad (\text{A-78})$$

unter verschiedenen Symmetrieoperationen wird betrachtet. Im Fall einer unitären Symmetrieoperation $\tilde{U}$ erfüllt der Streuoperator die Rela-

tion

$$\tilde{U} S \tilde{U}^{-1} = S. \quad (\text{A-79})$$

Durch Einschieben des Einheitsoperators $\tilde{U}^{-1}\tilde{U}$ in die Amplitude (A-78) und Ausnutzen von (A-79) folgt die Beziehung

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3; \mathbf{p}_4, \lambda_4; \dots | S | \mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \\ &= \langle \tilde{U}\{\mathbf{p}_3, \lambda_3\}; \tilde{U}\{\mathbf{p}_4, \lambda_4\}; \dots | S | \tilde{U}\{\mathbf{p}_1, \lambda_1\}; \tilde{U}\{\mathbf{p}_2, \lambda_2\} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A-80})$$

Für eine antiunitäre Symmetrieoperationen $\tilde{A}$ gilt

$$\tilde{A} S \tilde{A}^{-1} = S^+. \quad (\text{A-81})$$

Als Gegenstück zu (A-80) erhält man

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3; \mathbf{p}_4, \lambda_4; \dots | S | \mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \\ &= \langle \tilde{A}\{\mathbf{p}_1, \lambda_1\}; \tilde{A}\{\mathbf{p}_2, \lambda_2\} | S | \tilde{A}\{\mathbf{p}_3, \lambda_3\}; \tilde{A}\{\mathbf{p}_4, \lambda_4\}; \dots \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A-82})$$

A.4.1. Rotation $\tilde{R}_z(\phi)$ um die z-Achse mit Drehwinkel ϕ

Es ist $\tilde{U} \equiv \tilde{R}_z(\phi)$. Aus den Gleichungen (A-3a) und (A-22) für massive Teilchen bzw. aus den Relationen (A-36) und (A-52) für masselose Partikel erhält man (für $\mathbf{p}_1 = \{p_1, 0, 0\}$ und $\mathbf{p}_2 = \{p_2, \pi, \pi\}$) gemäß (A-24) und (A-25)

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_3, \Theta_3, \Phi_3, \lambda_3; \dots | S | \mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle = \\ &= e^{-i\phi(\lambda_1 - \lambda_2 - \sum_{f=3, \dots} \lambda_f)} \times \end{aligned} \quad (\text{A-83})$$

$$\times \langle p_3, \theta_3, \Phi_3 + \phi, \lambda_3; \dots \mid S \mid p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2 \rangle.$$

A.4.2. Paritätsoperation $\tilde{P}$

Es ist $\tilde{U} \equiv \tilde{P}$. Mit (A-57) erhält man für einen paritätsinvarianten S-Operator (für $p_1 = \{p_1, 0, 0\}$ und $p_2 = \{p_2, \pi, \pi\}$)

$$\begin{aligned} & \langle p_3, \lambda_3; \dots \mid S \mid p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2 \rangle = \quad (A-84) \\ & = \left[\prod_{f=3, \dots} K_P^{(f)*} (-1)^{s_f - \lambda_f} e^{-i2\lambda_f \Phi_f} \right] \\ & \times \left[K_P^{(1)} (-1)^{s_1 - \lambda_1} \right] \left[K_P^{(2)} (-1)^{s_2 - \lambda_2} (-1)^{2s_2} \right] \\ & \times \langle -p_3, -\lambda_3; \dots \mid S \mid -p_1, -\lambda_1; -p_2, -\lambda_2 \rangle. \end{aligned}$$

Der Faktor $(-1)^{2s_2}$ tritt bei der Transformation des entgegen der z-Achse einlaufenden Teilchens 2 auf wegen

$$e^{i2\lambda_2 \Phi_2} = e^{i2\lambda_2 \pi} = (-1)^{2\lambda_2} = (-1)^{2s_2}.$$

Bei Antiteilchen hat man den Faktor $\bar{K}_C$ zu verwenden. Alles andere bleibt gleich.

A.4.3. Spiegelung $\tilde{G}_0$ an der x-z-Ebene

Die Spiegelung $\tilde{G}_0$ an der x-z-Ebene setzt sich zusammen aus den Operationen $\tilde{P} \cdot \tilde{R}_y(\pi) = \tilde{R}_y(\pi) \cdot \tilde{P} \equiv \tilde{G}_0$, wobei $\tilde{R}_y(\pi)$ eine Drehung um die y-Achse mit Drehwinkel π ist (siehe Abschnitt A.1.3). Mit Hilfe von (A-27) und (A-57) erhält man zunächst für die Spiegelung eines Einteilchenzustandes an dieser Ebene die Gleichung

$$\tilde{G}_0 \mid p, \Theta, \Phi, \lambda \rangle = K_P (-1)^{s-\lambda} \mid p, \Theta, -\Phi, -\lambda \rangle . \quad (A-85)$$

Für paritätsinvariante S-Operatoren folgt daraus mit (A-80) (für $p_1 = \{p_1, 0, 0\}$ und $p_2 = \{p_2, \pi, \pi\}$)

$$\begin{aligned} \langle p_3, \Theta_3, \Phi_3, \lambda_3 ; \dots \mid S \mid p_1, \lambda_1 ; p_2, \lambda_2 \rangle &= \\ &= \left[\prod_{f=3, \dots} K_P^{(f)\star} (-1)^{s_f - \lambda_f} \right] \left[\prod_{i=1,2} K_P^{(i)} (-1)^{s_i - \lambda_i} \right] \\ &\times \langle p_3, \Theta_3, -\Phi_3, -\lambda_3 ; \dots \mid S \mid p_1, -\lambda_1 ; p_2, -\lambda_2 \rangle . \end{aligned} \quad (A-86)$$

A.4.4. Ladungskonjugation $\tilde{C}$

Mit Hilfe von (A-56) erhält man bei C-Invarianz (für $p_1 = \{p_1, 0, 0\}$ und $p_2 = \{p_2, \pi, \pi\}$)

$$\begin{aligned} \langle p_3, \lambda_3 ; \dots \mid S \mid p_1, \lambda_1 ; p_2, \lambda_2 \rangle &= \\ &= \left[\prod_{f=3, \dots} K_C^{(f)\star} \right] \left[\prod_{i=1,2} K_C^{(i)} \right] \\ &\times \langle \overline{p_3, \lambda_3} ; \dots \mid S \mid \overline{p_1, \lambda_1} ; \overline{p_2, \lambda_2} \rangle . \end{aligned} \quad (A-87)$$

A.4.5. Zeitumkehrtransformation $\tilde{T}$

Die Gleichungen (A-82) und (A-58) ergeben für einen T-invarianten Streuoperator (für $p_1 = \{p_1, 0, 0\}$ und $p_2 = \{p_2, \pi, \pi\}$)

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3 ; \dots \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1 ; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle = \quad (A-88) \\
 & = \left[\prod_{f=3, \dots} K_T^{(f)} e^{-i2\lambda_f \phi_f} \right] \left[K_T^{(1)\star} \right] \left[K_T^{(2)\star} (-1)^{2s_2} \right] \\
 & \times \langle -\mathbf{p}_1, \lambda_1 ; -\mathbf{p}_2, \lambda_2 \mid S \mid -\mathbf{p}_3, \lambda_3 ; \dots \rangle .
 \end{aligned}$$

A.4.6. Produkttransformation $\bar{R}_y(\pi)\bar{T}$

Die Anwendung von Gl. (A-88) und eine anschließende Drehung $R_y(\pi)$ um die y -Achse mit Drehwinkel π (siehe Abschnitt A.1.3, Gl. (A-27)) ergeben für einen zeitumkehrinvarianten Streuoperator S die Symmetrierelation (für $\mathbf{p}_1 = \{\mathbf{p}_1, 0, 0\}$ und $\mathbf{p}_2 = \{\mathbf{p}_2, \pi, \pi\}$)

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3 ; \dots \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1 ; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle = \quad (A-89) \\
 & = \left[\prod_{f=3, \dots} K_T^{(f)} \right] \left[\prod_{i=1,2} K_T^{(i)\star} \right] \\
 & \times \langle \mathbf{p}_1, \lambda_1 ; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \mid S \mid \mathbf{p}_3, \theta_3, -\Phi_3, \lambda_3 ; \dots \rangle \\
 & = \left[\prod_{f=3, \dots} K_T^{(f)} \right] \left[\prod_{i=1,2} K_T^{(i)\star} \right] \\
 & \times \langle \mathbf{p}_3, \theta_3, -\Phi_3, \lambda_3 ; \dots \mid S^+ \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1 ; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle^* .
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist besonders nützlich wenn man Streuprozesse in der niedrigsten Ordnung einer Störungstheorie betrachtet. Denn aus der Unitaritätsbedingung folgt, daß der S -Operator in der niedrigsten Ordnung ($\equiv S_N$) die Beziehung

$$S_N^+ = -S_N \quad (\text{A-90})$$

erfüllt (siehe z.B. Gl. (8-33a) in [82]). Deshalb müssen beispielsweise Helizitätsamplituden für elastische Zwei-Teilchen-Reaktionen in niedrigster Ordnung einer zeitumkehrinvarianten Störungstheorie an der Stelle $\Phi_3 = 0$ rein imaginär sein.

Anhang B : ÜBER DIE STRUKTUR DES WIRKUNGS - QUERSCHNITTES FUER DIE KOLLINEARE KOLLISION POLARISierter TEILCHEN

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens 1 an einem Teilchen 2 unter Emission der Teilchen 3, 4 etc. ist proportional zum Betragsquadrat des Matricelementes ME.

$$\begin{aligned} |ME|^2 &= ME \times ME^* \\ &= \langle 3; 4; \dots | S | 1; 2 \rangle \langle 3; 4; \dots | S | 1; 2 \rangle^*. \quad (B-1) \end{aligned}$$

Die Zahlen 1, 2 usw. in den Matricelementen stehen für einen vollständigen Satz von Observablen des betreffenden Teilchens. Die Zustände $|i\rangle$ lassen sich nach Helizitätszuständen entwickeln.

$$|i\rangle = \sum_{\lambda_i} a_{\lambda_i}^{(i)} |p_i, \lambda_i\rangle. \quad (B-2)$$

Nach Einsetzen von (B-2) in (B-1) erhält man

$$\begin{aligned} |ME|^2 &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_1' \dots \\ \dots \lambda_n \lambda_n'}} \rho_{\lambda_1 \lambda_1'}^{(1)} \rho_{\lambda_2 \lambda_2'}^{(2)} \rho_{\lambda_3 \lambda_3'}^{(3)*} \dots \rho_{\lambda_n \lambda_n'}^{(n)*} \quad (B-3) \\ &\times \langle p_3, \lambda_3; \dots | S | p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2 \rangle \\ &\times \langle p_3, \lambda_3'; \dots | S | p_1, \lambda_1'; p_2, \lambda_2' \rangle^*. \end{aligned}$$

Dabei sind die Größen

$$\rho_{\lambda_i \lambda_i'}^{(i)} \equiv a_{\lambda_i}^{(i)} a_{\lambda_i'}^{(i)*} \quad (B-4)$$

die Matricelemente der Spin-Dichtematrix $\rho^{(i)}$ des Teilchens i für vollständig polarisierte Zustände. Dichtematrixelemente für teilweise polarisierte Gemische erhält man aus (B-4) durch inkohärente Überlagerung vollständig polarisierter Zustände (vgl. Gl. (2-24)). Insbesondere wird ein unpolarisierter Zustand durch die Dichtematrix

$$\rho_{\lambda_i \lambda_i'}^{(i)} = \delta_{\lambda_i \lambda_i'} / f_i \quad (\text{B-5})$$

beschrieben. f_i ist die Anzahl der Spinfreiheitsgrade: $f_i = 2s_i + 1$ für massive, $f_i = 2$ für masselose Teilchen.

Die Dichtematrix hat folgende Eigenschaften: Sie ist hermitesch,

$$\rho_{\lambda_i \lambda_i'}^{(i)} = \rho_{\lambda_i' \lambda_i}^{(i)*}, \quad (\text{B-6})$$

und ihre Spur ist auf 1 normiert.

$$\text{Tr } \rho^{(i)} = \sum_{\lambda_i} \rho_{\lambda_i \lambda_i}^{(i)} = 1. \quad (\text{B-7})$$

B.1. Das Transformationsverhalten der Dichtematrix massiver Teilchen

Der Spinzustand eines Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$ im Koordinatensystem xyz sei durch die Dichtematrix ρ aus Gl. (B-4) beschrieben (der Teilchenindex wird im folgenden unterdrückt). Die Matrix ρ bezieht sich auf das von der Impulsrichtung abhängige lokale Koordinatensystem des Teilchens (vgl. Abschnitt 2.1.1). Dreht oder beschleunigt man das Teilchen (aktive Transformation), so ändert sich mit der Impulsrichtung ($\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$) die Dichtematrix des Teilchens ($\rho \rightarrow \rho'$). Das Transformationsverhalten von ρ wird in diesem Abschnitt angegeben. Als Nebenprodukt erhält man eine Entwicklung der Dichtematrix nach sphärischen Tensorkomponenten.

Mit Hilfe der Wigner-Transformation $L(\mathbf{p})$ (A-1) und der Entwicklung (B-2) läßt sich ein Teilchen mit beliebigem Impuls und beliebiger Polarisierung aus einem eindeutig durch die Entwicklungskoeffizienten a_λ festgelegten Zustand im Ruhesystem erzeugen.

$$|i\rangle = \sum_{\lambda = -s, \dots, s} a_{\lambda} |p, \lambda\rangle = \tilde{L}(p) \sum_{\lambda} a_{\lambda} |\overset{\circ}{p}, \lambda\rangle. \quad (B-8a)$$

Die Konstanten a_{λ} bestimmen über die Beziehung (B-4) die Dichtematrix im lokalen Koordinatensystem zum Impuls p . Der transformierte Zustand $\tilde{\Lambda} |i\rangle$ mit Impuls p' läßt sich auf gleiche Weise durch Wigner-Transformation $\tilde{L}(p')$ aus einem Zustand mit den Entwicklungskoeffizienten a'_{μ} erzeugen.

$$\tilde{\Lambda} |i\rangle = \tilde{L}(p') \sum_{\mu = -s, \dots, s} a'_{\mu} |\overset{\circ}{p}, \mu\rangle. \quad (B-8b)$$

Die Größen a'_{μ} legen die Dichtematrix im lokalen Koordinatensystem zum transformierten Impuls p' fest. Einsetzen von (B-8a) in (B-8b) und Verwenden der Gl. (A-3a) für das Transformationsverhalten von Helizitätszuständen ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} |i\rangle &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \tilde{\Lambda} |p, \lambda\rangle \\ &= \sum_{\mu, \lambda} a_{\lambda} |p' = \Lambda p, \mu\rangle D_{\lambda\mu}^{(s)}(L^{-1}(p') \wedge L(p)) \\ &= L(p') \sum_{\mu} \left\{ \sum_{\lambda} D_{\lambda\mu}^{(s)}(L^{-1}(p') \wedge L(p)) a_{\lambda} \right\} |\overset{\circ}{p}, \mu\rangle. \end{aligned} \quad (B-9)$$

Die transformierte Dichtematrix $\rho'_{\mu\mu'}$ ist demnach

$$\rho'_{\mu\mu'} = a'_{\mu} a'^{\star}_{\mu'} = \sum_{\lambda\lambda'} D_{\mu\lambda}^{(s)}(R_W) \rho_{\lambda\lambda'} D_{\lambda'\mu'}^{(s)+}(R_W), \quad (B-10)$$

wobei R_W die Wigner-Rotation bezeichnet (vgl. (A-3b)).

Mit Hilfe der Relationen (siehe z.B. [85,86])

$$D_{\mu\lambda}^{(s)\star}(R_W) = (-1)^{\mu-\lambda} D_{-\mu, -\lambda}^{(s)}(R_W) \quad (B-11)$$

und

$$D_{\mu\lambda}^{(s)}(R_W) D_{\mu'\lambda'}^{(s')}(R_W) = \sum_{\substack{J=s+s', \dots \\ \dots, |s-s'|}} C(s, s', J; \mu, \mu', M = \mu + \mu') \times C(s, s', J; \lambda, \lambda', M' = \lambda + \lambda') \times D_{MM'}^{(J)}(R_W) \quad (B-12)$$

- die Größen $C(j_1, j_2, J; m_1, m_2, M)$ sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Kopplung der Drehimpulse j_1 und j_2 zum Gesamtdrehimpuls J - läßt sich (B-10) umformen zu

$$\begin{aligned} \rho'_{\mu\mu'} &= \sum_{\lambda\lambda'} D_{\mu\lambda}^{(s)}(R_W) D_{\mu'\lambda'}^{(s')}(R_W) \rho_{\lambda\lambda'} \quad (B-13) \\ &= \sum_{\lambda\lambda'} D_{\mu\lambda}^{(s)}(R_W) D_{-\mu', -\lambda'}^{(s')}(R_W) (-1)^{\mu' - \lambda'} \rho_{\lambda\lambda'} \\ &= \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ J=0, \dots, 2s}} C(s, s, J; \mu, -\mu', M = \mu - \mu') \times C(s, s, J; \lambda, -\lambda', M' = \lambda - \lambda') \times D_{MM'}^{(J)}(R_W) (-1)^{s-\lambda'} (-1)^{s-\mu'} \rho_{\lambda\lambda'} \\ &= \sum_{J, M, M'} \left\{ \frac{(-1)^{s-\mu'}}{(2s+1)^{1/2}} C(s, s, J; \mu, -\mu', M) \right\} \times D_{MM'}^{(J)}(R_W) \\ &\quad \times \left\{ (2s+1)^{1/2} \sum_{\lambda\lambda'} (-1)^{s-\lambda'} C(s, s, J; \lambda, -\lambda', M') \rho_{\lambda\lambda'} \right\} \\ &= \sum_{J, M, M'} T_{\mu\mu'}^{(s)}(J, M) D_{MM'}^{(J)}(R_W) t_{JM'}^* \\ &= \sum_{J, M} T_{\mu\mu'}^{(s)}(J, M) t_{JM}^* \end{aligned}$$

Die zusätzliche Summation über M und M' in (B-13) kann eingeführt werden, weil die Clebsch-Gordan-Koeffizienten verschwinden:

$$C(j_1, j_2, J; m_1, m_2, M) = 0 \quad \text{für } M \neq m_1 + m_2. \quad (\text{B-14})$$

Aus den Gleichungen in (B-13) lassen sich folgende Aussagen ablesen bzw. ableiten:

1) Für $R_W = 1$ ist

$$D_{MM'}^{(J)}(1) = \delta_{MM'}.$$

Man erhält die Entwicklung der Spin-Dichtematrix ρ nach den Basis-matrizen $T^{(s)}(J, M)$.

$$\rho = \sum_{J, M} t_{JM}^* T^{(s)}(J, M) \quad (\text{B-15a})$$

mit

$$T_{\mu\mu'}^{(s)}(J, M) \equiv \frac{(-1)^{s-\mu'}}{(2s+1)^{1/2}} C(s, s, J; \mu, -\mu', M), \quad (\text{B-15b})$$

$$\begin{aligned} t_{JM}^* &\equiv (2s+1)^{1/2} \sum_{\lambda\lambda'} (-1)^{s-\lambda'} C(s, s, J; \lambda, -\lambda', M) \rho_{\lambda\lambda'} \\ &= (2s+1) \sum_{\lambda\lambda'} T_{\lambda\lambda'}^{(s)}(J, M) \rho_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (\text{B-15c})$$

2) Die Entwicklungskoeffizienten t_{JM} transformieren sich unter der Rotation R_W wie die Komponenten eines sphärischen Tensors J-ter Stufe.

$$t_{JM}'^* = \sum_{M'} D_{MM'}^{(J)}(R_W) t_{JM'}^*. \quad (\text{B-16})$$

Die Größen t_{JM} sind die sphärischen Tensorkomponenten der Spin-Dichtematrix (vgl. z.B. [84]).

3) Der Faktor $(2s + 1)^{1/2}$ in Gl. (B-15c) stellt sicher, daß

$$t_{00} \equiv 1 \quad (\text{B-17})$$

ist (vgl. [84]). Das folgt aus (B-15c) mit der Normierung der Dichtematrix auf $\text{Tr}(\rho) = 1$ (siehe (B-7)) und der Beziehung

$$C(j_1, j_2, 0; m_1, -m_2, 0) = \frac{(-1)^{j_1 - m_1}}{(2j_1 + 1)^{1/2}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (\text{B-18})$$

für Clebsch-Gordan-Koeffizienten (siehe z.B. [86]).

4) Auf Grund der Eigenschaften

$$C(j_1, j_2, J; m_1, m_2, M) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} C(j_1, j_2, J; -m_1, -m_2, -M), \quad (\text{B-19})$$

$$C(j_1, j_2, J; m_1, m_2, M) = (-1)^{j_1 + j_2 - J} C(j_1, j_2, J; m_2, m_1, M) \quad (\text{B-20})$$

(siehe z.B. [85,86]) für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten und der Hermitezität (B-6) der Dichtematrix folgen die Beziehungen

$$t_{J, -M} = (-1)^M t_{J, M}^* \quad (\text{B-21})$$

und

$$\begin{aligned} T_{\mu\mu}^{(s)}(J, -M) &= (-1)^M T_{\mu'\mu}^{(s)}(J, M) \\ &= (-1)^M T_{\mu\mu}^{(s)\top}(J, M), \end{aligned} \quad (\text{B-22a})$$

$$T_{-\mu, -\mu}^{(s)}(J, M) = (-1)^J T_{\mu\mu}^{(s)}(J, -M). \quad (\text{B-22b})$$

$T^{(s)\top}$ bezeichnet die transponierte Matrix von $T^{(s)}$.

5) Die Gestalt der Basismatrizen

$$T^{(s)}(J, M) = \begin{pmatrix} T_{\mu-s, \mu'-s}^{(s)}(J, M') & \dots & T_{\mu-s, \mu'-s}^{(s)}(J, M) \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{\mu-s, \mu'-s}^{(s)}(J, M) & \dots & T_{\mu-s, \mu'-s}^{(s)}(J, M) \end{pmatrix} \quad (B-23)$$

ist einfach. Wie man aus (B-15b) unter Verwendung von (B-14) sieht, können nur Matrixelemente mit $\mu' = \mu - M$ von Null verschieden sein. Die Matrizen (B-23) haben demnach nichtverschwindende Matrixelemente nur in der Hauptdiagonale oder in einer der Nebendiagonalen.

6) Für den Spezialfall $s = 1/2$ erhält man für die Matrizen $T^{(1/2)}(J, M)$ die folgenden Ausdrücke.

$$T^{(1/2)}(0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B-23a)$$

$$T^{(1/2)}(1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{(1/2)}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (B-23b)$$

Die Matrix $T^{(1/2)}(1, -1)$ bestimmt man aus $T^{(1/2)}(1, 1)$ mittels (B-22a).

7) Die Basismatrizen für den Fall Spin $s = 1$ sind

$$T^{(1)}(0, 0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B-24a)$$

$$T^{(1)}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{(1)}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B-24b)$$

$$T^{(1)}(2,0) = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{(1)}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{(1)}(2,2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B-24c})$$

Die Matrizen $T^{(1)}(J, -M)$ mit $M > 0$ erhält man aus (B-24b,c) mit Hilfe der Gl. (B-22a).

Im folgenden wird die Spin-Dichtematrix für Spin-1/2-Teilchen nach sphärischen Tensorkomponenten zerlegt. Die Dichtematrix sei gemäß [16] parametrisiert.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{+1/2, +1/2} & \rho_{+1/2, -1/2} \\ \rho_{-1/2, +1/2} & \rho_{-1/2, -1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_{\parallel} & Q s_{\perp} e^{-i\psi} \\ Q s_{\perp} e^{+i\psi} & 1 - s_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (\text{B-25})$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Kopplung von zwei Spin-1/2-Zuständen sind

$$\begin{aligned} C(1/2, 1/2, 0; \pm 1/2, \mp 1/2, 0) &= \pm 1/\sqrt{2}, \\ C(1/2, 1/2, 1; \pm 1/2, \mp 1/2, 0) &= 1/\sqrt{2}, \\ C(1/2, 1/2, 1; \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{B-26})$$

Mit (B-15a,b,c) lassen sich die sphärischen Tensorkomponenten berechnen. Das Resultat ist

$$\begin{aligned} t_{0,0} &= 1, \\ t_{1,0} &= \rho_{1/2, 1/2} - \rho_{-1/2, -1/2} = s_{\parallel}, \\ t_{1,1}^* &= -\sqrt{2} \rho_{1/2, -1/2} = -1/\sqrt{2} Q s_{\perp} e^{-i\psi}, \end{aligned}$$

$$t_{1,-1}^* = -t_{1,1} = \sqrt{2} \rho_{-1/2,1/2} = 1/\sqrt{2} Q s_{\perp} e^{+i\psi}. \quad (\text{B-27})$$

Die Elemente $\rho_{1/2,-1/2}$ und $\rho_{-1/2,1/2}$ transformieren sich also wie die Elemente eines sphärischen Tensors erster Stufe. Deshalb lassen sie sich durch die kartesischen Komponenten S_x und S_y eines Polarisationsvektors S ausdrücken. Die z-Komponente von S ist $S_z = s_{\parallel} = t_{10}$.

B.2. Das Transformationsverhalten der Dichtematrix masseloser Teilchen

Nach (A-34) läßt sich jeder Zustand eines masselosen Teilchens mit Impuls $\mathbf{k}$ durch Anwendung des Wigner-Operators $L(\mathbf{k})$ aus den beiden Zuständen mit Helizität $\lambda = \pm s$ und Standardimpuls $\hat{\mathbf{k}} = k_c(1,0,0,1)$ erzeugen. Das Analogon zu (B-8a) ist

$$|i\rangle = \sum_{\lambda = \pm s} a_{\lambda} |k, \lambda\rangle = \tilde{L}(\mathbf{k}) \sum_{\lambda = \pm s} a_{\lambda} |\hat{k}, \lambda\rangle. \quad (\text{B-28})$$

Die Entwicklungskoeffizienten a_{λ} bestimmen die Dichtematrix im lokalen Koordinatensystem zum Impuls $\mathbf{k}$.

Die Resultate und Zwischenrechnungen aus der Behandlung des Transformationsverhaltens der Dichtematrix massiver Teilchen (Abschnitt B.1) lassen sich auf den Fall masseloser Teilchen übertragen. Dazu bedient man sich folgender Argumentation. Nach Abschnitt A.2.1, Gl. (A-36), wird der Helizitätszustand eines masselosen Teilchen bei einer beliebigen Lorentz-Transformation mit einem Phasenfaktor $\exp(-i\lambda\Theta_W)$ multipliziert. Die Helizität bleibt erhalten. Dasselbe gilt für ein massives Teilchen in einem Zustand mit Helizität λ , wenn die mit der Lorentz-Transformation verbundene Wigner-Rotation R_W in einer Drehung $R_W = R_z(\Phi_W = \Theta_W)$ um die z-Achse besteht (vgl. (A-22)). Schreibt man nun die Dichtematrix eines masselosen Teilchens in der Form

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{+s,+s} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{+s,-s} \\ \rho_{s-1,+s} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \rho_{-s,+s} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{-s,-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_s \alpha_s^* & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \alpha_{-s}^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{-s} \alpha_s^* & 0 & \dots & 0 & \alpha_{-s} \alpha_{-s}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B-29})$$

- diese Gestalt der Dichtematrix ergibt sich, wenn man in (B-28) auch über die (für masselose Teilchen nicht existierenden) Zustände mit Helizität $\lambda \neq \pm s$ summiert, dafür aber deren Entwicklungskoeffizienten gleich Null setzt ($\alpha_\lambda = 0$ für $\lambda \neq \pm s$) -, so entspricht (B-29) der Dichtematrix eines massiven Teilchens mit Spin s , das sich ausschließlich in Zuständen mit $\lambda = \pm s$ befindet. Nach dem oben gesagten transformiert sich (B-29) wie die Dichtematrix eines massiven Teilchens unter einer Transformation, deren Wigner-Rotation aus der Rotation $R_z(\phi_W = \Theta_W)$ besteht. Damit ist gewährleistet, daß die Gestalt (B-29) der Dichtematrix eines masselosen Teilchens bei jeder Lorentz-Transformation erhalten bleibt und daß die Gln. (B-13) bis (B-24) - mit der Einschränkung $R_W = R_z(\Theta_W)$ - auf den Fall masseloser Teilchen übertragen werden können.

Wegen der speziellen Form (B-29) von ρ vereinfacht sich der Ausdruck (B-15c) für t_{JM}^* .

$$t_{JM}^* = (2s+1)^{1/2} \left[\begin{aligned} & C(s, s, J; +s, -s, M=0) \rho_{s,s} \\ & + (-1)^{2s} C(s, s, J; -s, +s, M=0) \rho_{-s,-s} \\ & + C(s, s, J; -s, -s, M=-2s) \rho_{-s,s} \\ & + (-1)^{2s} C(s, s, J; +s, +s, M=2s) \rho_{s,-s} \end{aligned} \right] \quad (\text{B-30})$$

Mit der Symmetrierelation (B-19) für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten und auf Grund von

$$C(s, s, J; s, s, 2s) = \delta_{J,2s} \quad (\text{B-31})$$

erhält man aus (B-30) für die Tensorkomponenten t_{JM} die Gleichungen

$$\begin{aligned} t_{2s,2s}^* &= (2s+1)^{1/2} (-1)^{2s} \rho_{+,s,-s}, \\ t_{2s,2s}^* &= (2s+1)^{1/2} \rho_{-,s,+,s} = (-1)^{2s} t_{2s,2s}, \\ t_{J,0} &= (2s+1)^{1/2} \times \begin{cases} C(s, s, J; s, -s, 0) & \text{für } J \text{ gerade,} \\ s_{\parallel} C(s, s, J; s, -s, 0) & \text{für } J \text{ ungerade,} \end{cases} \\ t_{J,M} &= 0 \text{ für alle übrigen } J \text{ und } M. \end{aligned} \quad (\text{B-32})$$

Dabei ist ausgenutzt, daß wegen $\text{Tr}(\rho) = 1$ die Beziehung

$$\rho_{+,s,+,s} + \rho_{-,s,-s,-s} = 1 \quad (\text{B-33})$$

besteht. Ferner ist $\rho_{+,s,+,s}$ durch

$$\rho_{+,s,+,s} = (1 + s_{\parallel}) / 2 \quad (\text{B-34})$$

parametrisiert.

Für die Anwendungen am wichtigsten ist der Fall masseloser Spin-1-Teilchen (Photonen). In der Parametrisierung der Dichtematrix nach [16],

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{+1,+1} & \rho_{+1,0} & \rho_{+1,-1} \\ \rho_{0,+1} & \rho_{0,0} & \rho_{0,-1} \\ \rho_{-1,+1} & \rho_{-1,0} & \rho_{-1,-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_{\parallel} & 0 & s_{\perp} e^{-i\psi} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{\perp} e^{+i\psi} & 0 & 1-s_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (\text{B-35})$$

gibt ψ den Drehwinkel der transversalen Komponente des Stokes-"Vektors" gegenüber der x-Achse an. $\psi = 0$ entspricht linearer Polarisation in Richtung der y-Achse; $\psi = \pi$ beschreibt lineare Polarisation in x-Richtung. Verwendet man $\psi = 2\alpha$, so ist $\alpha + \pi/2$ der Drehwinkel der linearen Polarisation gegenüber der x-Achse, gezählt in Richtung auf die positive y-Achse. Damit werden die Gln. (B-32) zu

$$t_{2,2}^* = \sqrt{3/4} s_{\perp} e^{-i2\alpha},$$

$$\begin{aligned} t_{2,-2}^* &= \sqrt{3/4} \, s_{\perp} e^{+i2\alpha} = t_{2,2}, \\ t_{2,0} &= 1/\sqrt{2}, \quad t_{1,0} = \sqrt{3/2} \, s_{\parallel}, \quad t_{0,0} = 1. \end{aligned} \quad (\text{B-36})$$

Man entnimmt (B-32), daß sich für $s > 1/2$ die Dichtematrixelemente $\rho_{+,s,-s}$ und $\rho_{-,s,+s}$ nicht mehr wie die sphärischen Komponenten eines Vektors transformieren, sondern wie Tensorkomponenten höherer Stufe. Daher ist eine Aufspaltung von $\rho_{s,-s}$ in $\rho_{s,-s} = S_x + iS_y$ zwar formal möglich, aber die Größen S_x und S_y sind keine kartesischen Komponenten eines Vektors. Insbesondere gilt das für die Komponenten des Stokes-"Vektors" für das Photon.

B.3. Die Struktur von Wirkungsquerschnitten mit polarisierten Teilchen im Anfangszustand

In diesem Abschnitt wird das nach Helizitätszuständen entwickelte Amplitudenquadrat (B-3) der Reaktion $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots$ umgeformt und weiterentwickelt. Polarisation der Endzustände wird nicht betrachtet, d.h. es ist über die Helizitäten der Streuteilchen zu summieren. Unter Verwendung von (B-5) erhält man

$$|ME|^2 = \sum_{\lambda_1 \lambda_1'} \rho_{\lambda_1 \lambda_1'} \rho_{\lambda_2 \lambda_2'} W(\Phi_3, \Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \quad (\text{B-37})$$

mit

$$\begin{aligned} W(\Phi_3, \Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} &\equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda_3, \lambda_4, \dots} \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3; \dots \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \\ &\quad \times \langle \mathbf{p}_3, \lambda_3; \dots \mid S \mid \mathbf{p}_1, \lambda_1'; \mathbf{p}_2, \lambda_2' \rangle^*. \end{aligned} \quad (\text{B-38})$$

Die Winkel Θ_i und Φ_i bezeichnen den Polar- und den Azimutwinkel der Impulsrichtung von Teilchen i . Unmittelbar aus der Definition (B-38) entnimmt man die Relation

$$W(\Phi_3, \Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = W(\Phi_3, \Theta_3; \dots)^*_{\lambda'_1 \lambda'_2; \lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{B-39})$$

Mit Hilfe von (A-83) kann man die Φ_3 -Abhängigkeit von $W(\Phi_3, \Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ explizit angeben.

$$\begin{aligned} W(\Phi_3, \Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} &= \\ &= e^{i\Phi_3 [(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda'_1 - \lambda'_2)]} V(\Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} \end{aligned} \quad (\text{B-40a})$$

mit

$$V(\Theta_3; \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} \equiv W(\Phi_3=0, \Theta_3; \hat{\Phi}_4, \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} \quad (\text{B-40b})$$

Die Azimutwinkel $\hat{\Phi}_i$ der Teilchen i , $i \geq 4$ sind auf den Azimutwinkel Φ_3 von Teilchen 3 bezogen

$$\Phi_i = \Phi_3 + (\Phi_i - \Phi_3) \equiv \Phi_3 + \hat{\Phi}_i \quad (\text{B-41})$$

Die für beliebige Streuprozesse gültigen Gln. (B-37) bis (B-41) werden nun für zwei Typen von Prozessen spezialisiert: erstens für Prozesse mit zwei Teilchen im Endzustand und zweitens auf inklusive Prozesse, bei denen das Teilchen 3 registriert wird. Im zweiten Fall integriert man (B-37) bzw. (B-40) über den Phasenraum der Teilchen 4, 5 etc. Die integrierte Größe $|\overline{ME}|^2$ ist nur noch von Φ_3 und Θ_3 abhängig. Aus (B-37) wird

$$\begin{aligned} |\overline{ME}|^2 &\equiv \int dp_4 \dots |ME|^2 \\ &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda'_1 \\ \lambda_2 \lambda'_2}} \rho_{\lambda_1 \lambda'_1} \rho_{\lambda_2 \lambda'_2} e^{i\Phi_3 [(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda'_1 - \lambda'_2)]} \\ &\quad \times \overline{V}(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} \end{aligned} \quad (\text{B-42})$$

mit

$$\bar{V}(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \equiv \int dp_4 \dots W(\Phi_3=0, \Theta_3; \hat{\Phi}_4, \dots)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} \quad (B-43)$$

Als Folge der Impulserhaltung sind die Gln. (B-42) und (B-43) auch für Ereignisse mit 2 Teilchen im Endzustand anwendbar. In diesem Fall hat die Phasenraumintegration keine Auswirkung und es gilt $|\overline{ME}|^2 = |\overline{ME}|^2$. Im folgenden werden daher unterschiedslos die durch einen Querstrich markierten integrierten Größen verwendet.

Setzt man in (B-42) die Entwicklung (B-15a) der Dichtematrix nach sphärischen Tensoren ein und nützt die Form der Basismatrizen $T^{(s)}(J, M)$ aus (vgl. (B-23)ff.), so erhält man

$$\begin{aligned} |\overline{ME}|^2 &= \\ &= \sum_{J_1 M_1 J_2 M_2} t_{J_1, M_1}^* t_{J_2, M_2}^* e^{i\Phi_3 (M_1 - M_2)} R(J_1, M_1; J_2, M_2) \end{aligned} \quad (B-44)$$

Die Gleichung gibt die Azimutwinkelverteilung der Streuprodukte bei kollinear kollidierenden Teilchen an. Die Funktionen

$$\begin{aligned} R(J_1, M_1; J_2, M_2) &\equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda_1 \lambda_2} T^{(s_1)}(J_1, M_1)_{\lambda_1, \lambda_1 - M_1} T^{(s_2)}(J_2, M_2)_{\lambda_2, \lambda_2 - M_2} \\ &\quad \times \bar{V}(\Theta_3)_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1 - M_1, \lambda_2 - M_2} \end{aligned} \quad (B-45)$$

mit $J_1 \leq 2s_1$, $|M_1| \leq J_1$, $J_2 \leq 2s_2$ und $|M_2| \leq J_2$ sind unabhängig vom Azimutwinkel Φ_3 . Jede der Größen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ besteht aus einer Summe über Produkte von Helizitätsamplituden mit derselben Azimutwinkelabhängigkeit. Die Helizitätsamplituden sind dabei an der Stelle $\Phi_3 = 0$ zu nehmen.

Wegen (B-39) und (B-22a,b) weisen die R-Funktionen die Symmetrierelationen

$$R(J_1, -M_1; J_2, -M_2) = (-1)^{M_1+M_2} R^*(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (B-46)$$

auf. Daraus folgt, daß sie für $M_1 = M_2 = 0$ reell sind.

Die Azimutwinkelverteilung der Streuprodukte läßt sich noch deutlicher erkennen, wenn man die Entwicklungskoeffizienten t_{JM} in Betrag und Phase aufspaltet.

$$\begin{aligned} t_{J_1 M_1} &\equiv s_{J_1 M_1} e^{i\psi_{J_1 M_1}} \text{ für } M_1 > 0, \\ t_{J_1 0} &\equiv s_{J_1 0} \text{ für } M_1 = 0. \end{aligned} \quad (B-47)$$

(Nach (B-21) sind die Tensorkomponenten $t_{J_1 0}$ reell.) Zusammen mit (B-46) und nach Änderung der Summationsreihenfolge wird (B-44) zu

$$\begin{aligned} |\overline{ME}|^2 &= \sum_{J_1 J_2} s_{J_1 0} s_{J_2 0} R(J_1, 0; J_2, 0) \quad (B-48) \\ &+ \sum_{\substack{J_1 J_2 \\ M_1 > 0}} 2 s_{J_1 M_1} s_{J_2 0} \left\{ \begin{aligned} &\cos(\Phi_3 M_1 - \psi_{J_1 M_1}) \operatorname{Re} R(J_1, M_1; J_2, 0) \\ &- \sin(\Phi_3 M_1 - \psi_{J_1 M_1}) \operatorname{Im} R(J_1, M_1; J_2, 0) \end{aligned} \right\} \\ &+ \sum_{\substack{J_1 J_2 \\ M_2 > 0}} 2 s_{J_1 0} s_{J_2 M_2} \left\{ \begin{aligned} &\cos(\Phi_3 M_2 + \psi_{J_2 M_2}) \operatorname{Re} R(J_1, 0; J_2, M_2) \\ &+ \sin(\Phi_3 M_2 + \psi_{J_2 M_2}) \operatorname{Im} R(J_1, 0; J_2, M_2) \end{aligned} \right\} \\ &+ \sum_{\substack{J_1 J_2 \\ M_1 > 0 \\ M_2 > 0}} 2 s_{J_1 M_1} s_{J_2 M_2} \cdot \\ &\quad \times \left\{ \begin{aligned} &\cos[\Phi_3(M_1 - M_2) - \psi_{J_1 M_1} - \psi_{J_2 M_2}] \operatorname{Re} R(J_1, M_1; J_2, M_2) \\ &- \sin[\Phi_3(M_1 - M_2) - \psi_{J_1 M_1} - \psi_{J_2 M_2}] \operatorname{Im} R(J_1, M_1; J_2, M_2) \\ &+ (-1)^{M_1} \cos[\Phi_3(M_1 + M_2) - \psi_{J_1 M_1} + \psi_{J_2 M_2}] \operatorname{Re} R(J_1, M_1; J_2, -M_2) \\ &+ (-1)^{M_2} \sin[\Phi_3(M_1 + M_2) - \psi_{J_1 M_1} + \psi_{J_2 M_2}] \operatorname{Im} R(J_1, M_1; J_2, -M_2) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Symmetriebeziehungen und Näherungen bringen einige der Summanden in (B-48) zum Verschwinden. Paritätserhaltung der Wechselwirkung hat

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = (-1)^{J_1 + J_2} R^*(J_1, M_1; J_2, M_2) \quad (B-49)$$

zur Folge, sodaß die Funktion $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ entweder reell (für $J_1 + J_2$ gerade) oder rein imaginär (für $J_1 + J_2$ ungerade) ist. Zum Beweis von (B-49) benützt man die Definition (B-45) von $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$, die aus (A-86) abgeleitete Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{V}(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} & \quad (B-49') \\ &= (-1)^{\lambda_1 - \lambda'_1} (-1)^{\lambda_2 - \lambda'_2} \bar{V}(\Theta_3)_{-\lambda_1, -\lambda_2; -\lambda'_1, -\lambda'_2}, \end{aligned}$$

sowie die Gleichung (B-22b).

In niedrigster Ordnung einer zeitumkehrinvarianten Störungstheorie sind die Produkte $\bar{V}_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ von Helizitätsamplituden reell. Daher ist

$$\text{Im } R(J_1, M_1; J_2, M_2) = 0. \quad (B-50)$$

Beweis: In niedrigster Ordnung einer Störungstheorie erfüllt der Streuoperator S_N die Beziehung $S_N^\dagger = -S_N$ (vgl. Anhang A.4.6, Gl. (A-90)). Aus der Definitionsgleichung (B-43) für $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ und der Symmetriebeziehung (A-89) für die Helizitätsamplituden erhält man somit

$$\bar{V}(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = \bar{V}(\Theta_3)_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}^* \quad (B-50')$$

Da auch die Matrizen $T(J, M)$ reell sind (vgl. (B-15b)), folgt aus (B-50') und der Definitionsgleichung (B-45) die Beziehung (B-50).

In einer sowohl zeitumkehr- als auch paritätsinvarianten Theorie kann man in niedrigster Ordnung (B-49) und (B-50) zusammenfassen zu

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = (-1)^{J_1 + J_2} R(J_1, M_1; J_2, M_2). \quad (B-50'')$$

Falls $J_1 + J_2$ ungerade ist, verschwindet $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$.

(Anmerkung: Einige der Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ enthalten Helizitätsamplituden, die für masselose Teilchen nicht existieren. Ist eines (oder sind beide) der einfallenden Teilchen masselos, so muß man Linearkombinationen aus den Größen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ bilden, in denen sich diese Amplituden herausheben (siehe Abschnitt 2.1.2, insbesondere die Gln. (2-73) und (2-74)). Auf die Linearkombinationen lassen sich gliedweise die Beziehungen (B-49) und (B-50) anwenden (siehe die Gln. (2-82') und (2-83') und die daran anschließenden Bemerkungen).)

Im folgenden wird (B-48) auf zwei wichtige Fälle spezialisiert.

B.3.1. Spezialfall: Spin-1/2 + Spin-1/2 $\rightarrow$. . .

Aus (B-27) entnimmt man

$$\begin{aligned} s_{J_1=0, M_1=0} &= 1, \\ s_{J_1=1, M_1=0} &= s_{\parallel}^{(i)}, \\ s_{J_1=1, M_1=1} &= -1/\sqrt{2} \quad Q^{(i)} s_{\perp}^{(i)}, \quad \psi_{J_1=1, M_1=1} = \psi^{(i)}. \end{aligned} \quad (B-51)$$

Damit wird aus (B-48)

$$\begin{aligned} |\overline{ME}|^2 &= R(0,0; 0,0) + s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} R(1,0; 1,0) \\ &\quad + s_{\parallel}^{(1)} R(1,0; 0,0) + s_{\parallel}^{(2)} R(0,0; 1,0) \\ &\quad - \sqrt{2} \quad Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Re} R(1,1; 0,0) \\ - \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Im} R(1,1; 0,0) \end{array} \right\} \\ &\quad - \sqrt{2} \quad Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Re} R(1,1; 1,0) \\ - \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Im} R(1,1; 1,0) \end{array} \right\} \\ &\quad - \sqrt{2} \quad Q^{(2)} s_{\perp}^{(2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \operatorname{Re} R(0,0; 1,1) \\ + \sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \operatorname{Im} R(0,0; 1,1) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{2} \, s_{\parallel}^{(1)} Q^{(2)} s_{\perp}^{(2)} \left\{ \begin{aligned} & \cos(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \operatorname{Re} R(1,0; 1,1) \\ & + \sin(\Phi_3 + \psi^{(2)}) \operatorname{Im} R(1,0; 1,1) \end{aligned} \right\} \\
 & + Q^{(1)} Q^{(2)} s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \left\{ \begin{aligned} & \cos(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \operatorname{Re} R(1,1; 1,1) \\ & + \sin(\psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \operatorname{Im} R(1,1; 1,1) \\ & - \cos(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \operatorname{Re} R(1,1; 1, -1) \\ & + \sin(2\Phi_3 - \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \operatorname{Im} R(1,1; 1, -1) \end{aligned} \right\} .
 \end{aligned}$$

(B-52)

Für paritätserhaltende Wechselwirkungen verschwinden nach (B-46) und (B-49) folgende Terme:

$$\begin{aligned}
 R(1,0; 0,0) &= R(0,0; 1,0) = 0 , \\
 \operatorname{Re} R(1,1; 0,0) &= \operatorname{Re} R(0,0; 1,1) = 0 , \\
 \operatorname{Im} R(1,1; 1,0) &= \operatorname{Im} R(1,0; 1,1) = 0 , \\
 \operatorname{Im} R(1,1; 1,1) &= \operatorname{Im} R(1,1; 1,-1) = 0 .
 \end{aligned} \quad (\text{B-53})$$

Mit Hilfe der expliziten Ausdrücke in (B-23a,b) für die T-Matrizen kann man die R-Funktionen gemäß (B-45) angeben (die Helizitäten $\lambda_i = \pm 1/2$ werden durch ihr Vorzeichen abgekürzt: $\pm 1/2 \rightarrow \pm$).

$$\begin{aligned}
 R(0,0; 0,0) &= (\bar{V}_{++,+} + \bar{V}_{+-,+} + \bar{V}_{-+,-} + \bar{V}_{---}) / 4 , \\
 R(1,0; 1,0) &= (\bar{V}_{++,+} - \bar{V}_{+-,+} - \bar{V}_{-+,-} + \bar{V}_{---}) / 4 , \\
 R(1,0; 0,0) &= (\bar{V}_{++,+} + \bar{V}_{+-,+} - \bar{V}_{-+,-} - \bar{V}_{---}) / 4 , \\
 R(0,0; 1,0) &= (\bar{V}_{++,+} - \bar{V}_{+-,+} + \bar{V}_{-+,-} - \bar{V}_{---}) / 4 , \\
 R(1,1; 0,0) &= (-\bar{V}_{++,-} - \bar{V}_{+-,-}) / \sqrt{8} , \\
 R(1,1; 1,0) &= (-\bar{V}_{++,-} + \bar{V}_{+-,-}) / \sqrt{8} , \\
 R(0,0; 1,1) &= (-\bar{V}_{++,-} - \bar{V}_{+-,-}) / \sqrt{8} , \\
 R(1,0; 1,1) &= (-\bar{V}_{++,-} + \bar{V}_{+-,-}) / \sqrt{8} , \\
 R(1,1; 1,1) &= (+\bar{V}_{++,-}) / 2 , \\
 R(1,1; 1,-1) &= (-\bar{V}_{+-,-}) / 2 .
 \end{aligned} \quad (\text{B-54})$$

B.3.2. Spezialfall: Spin-1/2 + Photon $\rightarrow$. . .

Teilchen 1 sei das Spin-1/2-Teilchen, Teilchen 2 das Photon. Die Größen s_{J_1, M_1} sind in (B-51) angegeben. Für das Photon erhält man aus (B-36) und mit (B-47) die Beziehungen

$$\begin{aligned} s_{J_2=0, M_2=0} &= 1, & s_{J_2=1, M_2=0} &= \sqrt{3/2} s_{\parallel}^{(2)}, \\ s_{J_2=2, M_2=0} &= \sqrt{1/2}, & s_{J_2=1, M_2=1} &= s_{J_2=2, M_2=1} = 0, \\ s_{J_2=2, M_2=2} &= \sqrt{3} s_{\perp}^{(2)} / 2, & s_{J_2=2, M_2=2} &= 2 \alpha^{(2)}. \end{aligned} \quad (B-55)$$

Damit wird (B-48) zu

$$\begin{aligned} |\overline{ME}|^2 &= [R(0,0; 0,0) + 1/\sqrt{2} R(0,0; 2,0)] \\ &+ s_{\parallel}^{(1)} [R(1,0; 0,0) + 1/\sqrt{2} R(1,0; 2,0)] \\ &+ s_{\parallel}^{(2)} \sqrt{3/2} R(0,0; 1,0) \\ &+ s_{\parallel}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \sqrt{3/2} R(1,0; 1,0) \\ &- \sqrt{2} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} \{ \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Re} [R(1,1;0,0) + 1/\sqrt{2} R(1,1;2,0)] \\ &\quad - \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Im} [R(1,1;0,0) + 1/\sqrt{2} R(1,1;2,0)] \} \\ &- \sqrt{3} Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\parallel}^{(2)} \{ \cos(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Re} R(1,1; 1,0) \\ &\quad - \sin(\Phi_3 - \psi^{(1)}) \operatorname{Im} R(1,1; 1,0) \} \\ &+ \sqrt{3} s_{\perp}^{(2)} \{ \cos(2\Phi_3 + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Re} R(0,0; 2,2) \\ &\quad + \sin(2\Phi_3 + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Im} R(0,0; 2,2) \} \\ &+ \sqrt{3} s_{\parallel}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \{ \cos(2\Phi_3 + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Re} R(1,0; 2,2) \\ &\quad + \sin(2\Phi_3 + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Im} R(1,0; 2,2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{3/2} \, Q^{(1)} s_{\perp}^{(1)} s_{\perp}^{(2)} \left\{ \begin{aligned} & \cos(\Phi_3 + \psi^{(1)} + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Re} R(1,1; 2,2) \\ & + \sin(\Phi_3 + \psi^{(1)} + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Im} R(1,1; 2,2) \\ & - \cos(3\Phi_3 - \psi^{(1)} + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Re} R(1,1; 2,-2) \\ & - \sin(3\Phi_3 - \psi^{(1)} + 2\alpha^{(2)}) \operatorname{Im} R(1,1; 2,-2) \end{aligned} \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{B-56}$$

Bei Paritäts-Invarianz verschwinden nach (B-46) und (B-49) folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 [R(1,0; 0,0) + 1/\sqrt{2} \, R(1,0; 2,0)] &= 0 , \\
 \operatorname{Re} [R(1,1; 0,0) + 1/\sqrt{2} \, R(1,1; 2,0)] &= 0 , \\
 R(0,0; 1,0) &= \operatorname{Re} R(1,0; 2,2) = 0 , \\
 \operatorname{Re} R(1,1; 2,2) &= \operatorname{Re} R(1,1; 2,-2) = 0 , \\
 \operatorname{Im} R(1,1; 1,0) &= \operatorname{Im} R(0,0; 2,2) = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{B-57}$$

Mit Hilfe von (B-23) und (B-24) lassen sich die Größen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ explizit angeben (zur Abkürzung wird wiederum anstelle der Helizitäten $\lambda_1 = \pm 1/2$ bzw. $\lambda_2 = \pm 1$ nur das Vorzeichen $\pm$ geschrieben).

$$\begin{aligned}
 R(0,0; 0,0) + 1/\sqrt{2} \, R(0,0; 2,0) &= \\
 &= (\bar{V}_{++,+} + \bar{V}_{+-,+} + \bar{V}_{-+,-} + \bar{V}_{--,-}) / 4 , \\
 R(1,0; 1,0) &= (\bar{V}_{++,+} - \bar{V}_{+-,+} - \bar{V}_{-+,-} + \bar{V}_{--,-}) / \sqrt{24} , \\
 R(1,0; 0,0) + 1/\sqrt{2} \, R(1,0; 2,0) &= \\
 &= (\bar{V}_{++,+} + \bar{V}_{+-,+} - \bar{V}_{-+,-} - \bar{V}_{--,-}) / 4 , \\
 R(0,0; 1,0) &= (\bar{V}_{++,+} - \bar{V}_{+-,+} + \bar{V}_{-+,-} - \bar{V}_{--,-}) / \sqrt{24} , \\
 R(1,1; 0,0) + 1/\sqrt{2} \, R(1,1; 2,0) &= \\
 &= (-\bar{V}_{++,-} - \bar{V}_{+-,-}) / \sqrt{8} , \\
 R(1,1; 1,0) &= (-\bar{V}_{++,-} + \bar{V}_{+-,-}) / \sqrt{12} , \\
 R(0,0; 2,2) &= (+\bar{V}_{++,+} + \bar{V}_{-+,-}) / \sqrt{12} , \\
 R(1,0; 2,2) &= (+\bar{V}_{++,-} - \bar{V}_{-+,-}) / \sqrt{12} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(1,1; 2,2) &= (-\bar{V}_{++,-})/\sqrt{6}, \\ R(1,1; 2,-2) &= (-\bar{V}_{+-,-})/\sqrt{6}. \end{aligned} \quad (\text{B-58})$$

Die Kombinationen $R(\dots) + 1/\sqrt{2} R(\dots)$ lassen sich zurückführen auf die Matrixkombinationen

$$T^{(1)}(0,0) + 1/\sqrt{2} T^{(1)}(2,0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch sie werden formal mitgezählte, aber für Photonen nicht existierenden Helizitätsamplituden eliminiert (vgl. Abschnitt 2.1.2).

B.4. Hochenergienäherung für die Streuung von Spin-1/2-Teilchen

Bei hohen Energien lassen sich im Rahmen der Störungstheorie Auswahlregeln für die Helizitätsamplituden $\langle \lambda_3; \dots | S | \lambda_1; \lambda_2 \rangle$ angeben (die Teilchenimpulse spielen hier keine Rolle und werden unterdrückt). Sie haben zur Folge, daß einige der R-Funktionen in (B-48) zu Null werden.

Um das zu sehen, werden in diesem Abschnitt die Ströme der Spin-1/2-Teilchen betrachtet, die sich durch die einzelnen Diagramme oder Teilamplituden einer Helizitätsamplitude ziehen (vgl. Abb. B - 1). Jeder Fermionenstrom $J(\dots)$ ist von der Form

$$J(Q', \lambda'; Q, \lambda) \equiv \bar{u}^{(Q')}(\lambda') \Gamma u^{(Q)}(\lambda). \quad (\text{B-59})$$

Γ steht für eine beliebige Kombination von Diracschen γ -Matrizen. Wie in Anhang A.1.2 bezeichnet der Ladungsindex $Q = +1$ ein Fermion und $Q = -1$ ein Anti-Fermion. Die Struktur solcher Ströme ist ausführlich in einer Arbeit von Anders und Jachmann [16] untersucht.

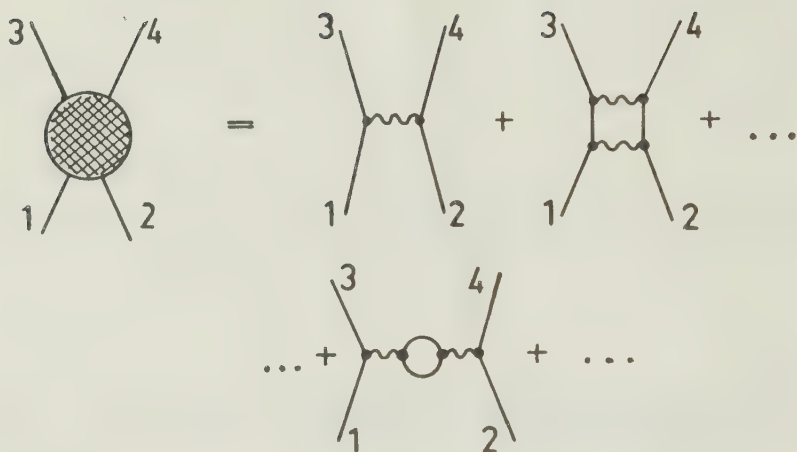


Abb. B - 1 : Aufspaltung der Helizitätsamplitude in eine Reihe von Diagrammen oder Teilamplituden. Jede der durchgezogenen Linien repräsentiert den Strom eines Spin-1/2-Teilchens.

Im folgenden wird angenommen, daß in den Zählern der Ströme die Massen der Spin-1/2-Teilchen gegenüber den Impulsen vernachlässigt werden können. Diese Näherung wird als Hochenergienäherung bezeichnet. Sie soll auch dann anwendbar sein, wenn über den Propagatorimpuls integriert werden muß. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Spin-1/2-Teilchen nur über Vektor- und Axialvektorkopplungen mit anderen Strömen des Diagrammes wechselwirken. Insbesondere sollen keine anomalen magnetischen Momente und keine skalaren Bosonen auftreten. Unter diesen Bedingungen gilt, daß jeder Strom (B-59) aus einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen besteht. $J(Q', \lambda'; Q, \lambda)$ verschwindet daher für

- i) $Q' = Q$ falls $\lambda' = -\lambda$ bzw. für
- ii) $Q' = -Q$ falls $\lambda' = \lambda$ ist [16].

Infolgedessen kann man für die genannten Bedingungen einer Hochenergienäherung den Fermionenstrom in der Form

$$J(Q', \lambda'; Q, \lambda) = \delta_{Q'Q} \delta_{\lambda'\lambda} J_S(Q, \lambda) + \delta_{Q', -Q} \delta_{\lambda', -\lambda} J_V(Q, \lambda) \quad (\text{B-60})$$

schreiben. Der Index "S" in $J_S(Q, \lambda)$ soll darauf hinweisen, daß es sich bei $Q' = Q$ um eine Streuung handelt. $J_V(Q, \lambda)$ beschreibt die Vernichtung oder Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paares.

Wegen (B-60) verschwinden Helizitätsamplituden mit bestimmten Indexkombinationen. Für einige Spezialfälle wird untersucht, wie sich das auf die in (B-38) definierten Produkte $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ von Helizitätsamplituden und auf die Funktionen $R(J_1, M_1; J_2, M_2)$ aus (B-45) auswirkt.

B.4.1 Diagramme ohne Austauschsterme

Alle Ströme eines Diagrammes sind voneinander verschieden. In Abschnitt B.4.1.1 wird die Streuung eines Spin-1/2-Teilchens an einem beliebigen Teilchen anderer Sorte betrachtet. Abschnitt B.4.1.2 beschäftigt sich mit solchen Paarvernichtungsprozessen von Spin-1/2-Teilchen, bei denen keines der entstehenden Teilchen identisch mit einem der einfallenden Teilchen ist.

B.4.1.1. Streuung eines Spin-1/2-Teilchens

Die Helizitätsamplitude läßt sich aufspalten in Diagramme von der Art, wie sie auf der rechten Seite der symbolischen Gleichung in Abb. B-2 zu sehen sind.

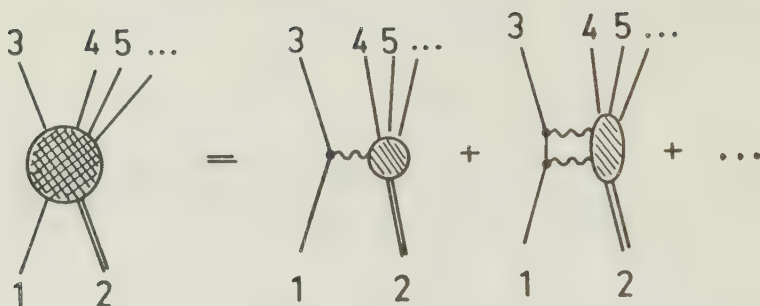


Abb. B - 2 : Störungstheoretische Entwicklung der Helizitätsamplitude für die Streuung eines Spin-1/2-Teilchens.

Hochenergienäherung für den Strom $1 \rightarrow 3$ liefert nach (B-60) in jeder Teilamplitude einen Faktor $\delta_{\lambda_1 \lambda_3}$. Die Summation in (B-38) über die Helizität λ_3 von Teilchen 3 ergibt daher

$$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_1 \neq \lambda'_1, \quad (\text{B-61})$$

denn für $\lambda_1 \neq \lambda'_1$ ist in jedem Summanden eine der beiden miteinander multiplizierten Teilamplituden helizitätsunterdrückt. Da sich nach (B-40a) die Funktionen $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ von den Funktionen $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ nur durch einen Phasenfaktor unterscheiden, gilt für diese eine zu (B-61) analoge Beziehung. Mit (B-45) und (B-23) folgt also aus (B-61) die Relation

$$R(J_1, M_1; J_2, M_2) = 0 \quad \text{für} \quad M_1 \neq 0. \quad (\text{B-62})$$

B.4.1.2. Paarvernichtung zweier Spin-1/2-Teilchen

Für den Fall der Paarvernichtung ($Q^{(1)} = -Q^{(2)}$) läßt sich die Helizitätsamplitude gemäß Abb. B-3 zerlegen.

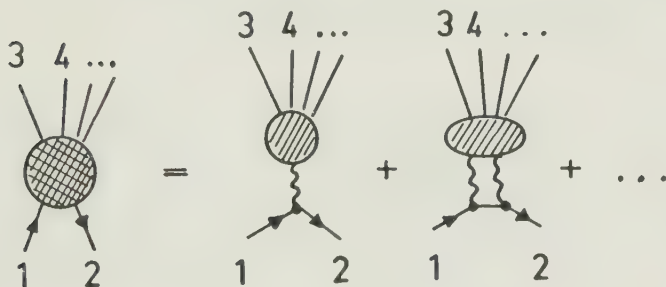


Abb. B-3 : Störungstheoretische Entwicklung der Helizitätsamplitude für die Paarvernichtung zweier Spin-1/2-Teilchen.

Hochenergienäherung für den Strom $1 \rightarrow 2$ hat in jedem Diagramm auf der rechten Seite der Gleichung in Abb. B-3 einen Faktor $\delta_{\lambda_1, -\lambda_2}$ zur Folge. Es gilt

$$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} = 0 \quad \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1' = \lambda_2' . \quad (\text{B-63})$$

Insbesondere gilt (B-63) für $\Phi_3 = 0$ und deshalb wegen (B-40b) auch für die Funktionen $V_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}$. Aus (B-54) lassen sich damit die folgenden Aussagen ableiten:

$$\begin{aligned} R(1,0; 1,0) &= -R(0,0; 0,0) , \\ R(1,0; 0,0) &= -R(0,0; 1,0) , \end{aligned}$$

$R(1,1; 1,-1) \neq 0$ im allgemeinen,
sämtliche anderen R-Funktionen verschwinden
in Hochenergienäherung. (B-64)

B.4.2. Streuung zweier identischer Spin-1/2-Teilchen (Auftreten von Austauschdiagrammen)

Betrachtet werden Helizitätsamplituden für die Streuung zweier identischer Spin-1/2-Teilchen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien die Teilchen Elektronen. Zugelassen sind inelastische Streuprozesse, in denen neben beliebigen anderen Teilchen auch Elektron-Positron-Paare erzeugt werden. Einige Beispiele für die dabei auftretenden Diagramme sind in Abb. B - 4 graphisch dargestellt. Für alle Elektronenströme wird die Hochenergienäherung angewandt.

In jedem Diagramm auf der rechten Seite der störungstheoretischen Entwicklung in Abb. B - 4 treten im Endzustand die beiden einlaufenden Elektronlinien wieder aus. Hinzu kommt eine Elektronlinie für jedes erzeugte Elektron-Positron-Paar. (Werden zusätzlich andere Teilchen als Elektronen und Positronen erzeugt, so ist das ohne Auswirkungen auf die folgenden Betrachtungen.) Damit besteht $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}$ aus Summanden der Form

$$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda'_1 \lambda'_2}^{(ik)} = \sum_{\lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_5 \lambda_{\bar{5}} \dots} \langle \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_{\bar{5}} \dots | S^{(i)} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \times \langle \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_{\bar{5}} \dots | S^{(k)} | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle^* .$$

(B-65)

Ein Querstrich kennzeichnet ein Antiteilchen. Die Indizes i und k numerieren die i-te und die k-te Teilamplitude.

Zur Diskussion der Helizitätsstruktur von $W^{(ik)}$ führt man die Summe über die Helizitätsindizes $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ in einer bestimmten Reihenfolge

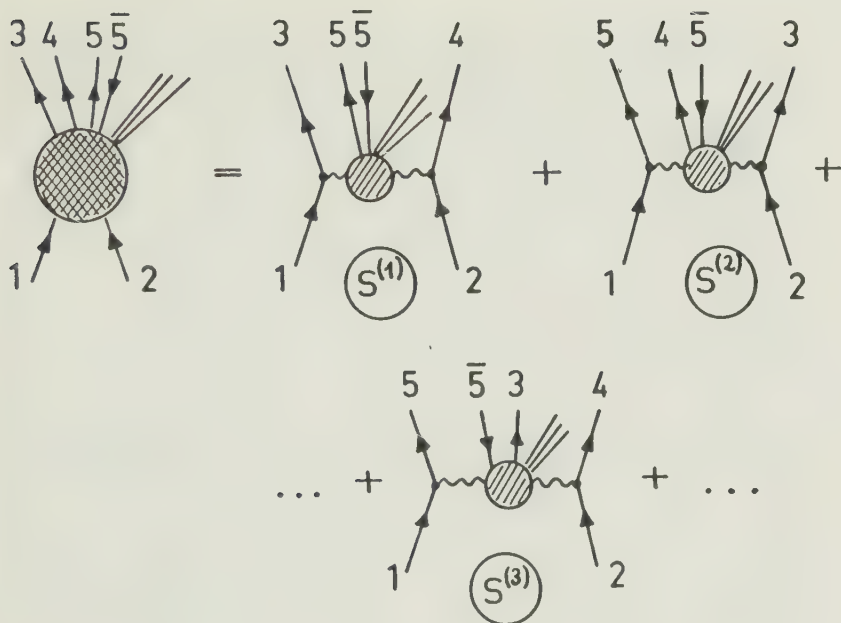


Abb. B - 4 : Einige Teilamplituden, die in der störungstheoretischen Entwicklung einer Helizitätsamplitude für inelastische Elektron-Elektron-Streuung auftreten können.

aus. In jedem Summationsschritt wird Gl. (B-60) ausgenützt. Man beginnt mit Teilchen 1 in Amplitude i. Der Strom dieses Teilchens ende in Teilchen 3. Infolge der Auswahlregel (B-60) muß die Helizität längs des Stromes erhalten sein. Deshalb bleibt in der Summe über λ_3 nur der Term mit $\lambda_3 = \lambda_1$ übrig. Nun betrachtet man die Amplitude k. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Teilchen 3 ist in Diagramm k mit einem der einlaufenden Teilchen verbunden, beispielsweise mit Teilchen 2. Aus (B-60) folgt, daß λ_2' gleich λ_3 und deshalb gleich λ_1 sein muß, damit die Teilamplitude k nicht verschwindet. (Vgl. hierzu die Teilamplituden $i = 1$ und $k = 2$ in Abb. B - 4.)

b) Teilchen 3 ist in Diagramm k mit einem auslaufenden Antiteilchen verbunden, z.B. mit Teilchen 5. Damit die Amplitude k nicht null wird, muß die Helizität $\lambda_{\bar{5}}$ gleich $-\lambda_3$ sein. In der Summe über $\lambda_{\bar{5}}$ bleibt nur der Term mit $\lambda_{\bar{5}} = -\lambda_3 = -\lambda_1$ übrig. (Vgl. Abb. B-4 für $i=1$ und $k=3$.)

Im Fall a) liefert die Summe in (B-65) nur einen Beitrag falls $\lambda_2' = \lambda_1$ ist. Der Fall b) muß weiter behandelt werden. Man geht zurück zu Teilamplitude i und verfolgt dort den Strom von Teilchen 5. Er mündet in einem auslaufenden Elektron, z.B. in Teilchen 5. Helizitätserhaltung erfordert $\lambda_5 = -\lambda_{\bar{5}} = \lambda_1$. Danach betrachtet man die Elektronlinie von Teilchen 5 in Amplitude k und führt nun für Teilchen 5 eine Fallunterscheidung zwischen a) und b) durch. Auf diese Weise wechselt man solange von Diagramm k zu Diagramm i und zurück, bis man in Diagramm k auf eine Elektronlinie stößt, die mit einem Teilchen im Anfangszustand verbunden ist (= Fall a)). Dort angekommen, hat man immer eine gerade Anzahl von Vorzeichenänderungen des Helizitätszustandes durchgeführt: Damit $W^{(ik)}$ von Null verschieden sein kann, muß also - je nach Topologie der Diagramme - entweder λ_1' oder λ_2' gleich λ_1 sein.

Man kann dieses Vorgehen graphisch darstellen. Wenn man die Teilamplituden i und k nebeneinander zeichnet und die Linien der Teilchen mit gleicher Nummer miteinander verbindet, so erhält man offene und geschlossene Linienzüge. Ein offener Linienzug beschreibt den Helizitätsübertrag von Diagramm i auf die Teilamplitude k. Die geschlossenen Linien entsprechen einer Summation über die Helizitätszustände auslaufender Teilchen. Dieses graphische Verfahren ist analog zu einer in [82] beschriebenen Methode für die graphische Darstellung von Spuren.

In der eben durchgeführten Betrachtung diente Teilchen 1 als Ausgangspunkt der Summation. Eine entsprechende Aussage erhält man, wenn man mit Teilchen 2 beginnt: entweder λ_1' oder λ_2' muß gleich λ_2 sein. Andernfalls verschwindet $W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}^{(ik)}$.

Diese beiden Aussagen sind nicht unabhängig voneinander. Ist die Topologie der Diagramme i und k so, daß die graphische Veranschau-

lichung der bei Teilchen 1 beginnenden Summation das Teilchen 1 in Diagramm i mit dem Teilchen 1 (2) in Diagramm k verbindet, so führt die von Teilchen 2 in Diagramm i ausgehende Summation in einem geschlossenen Linienzug zu Teilchen 2 (1) in Diagramm k. Andernfalls müßte eine der Elektronenlinien sich verzweigen. Zusammengefaßt: In Hochenergienäherung bleiben von den Ausdrücken (B-65) nur solche übrig, deren Indizes gemäß

$$\left. \begin{array}{l} W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1 \lambda_2}^{(ik)} \text{ bzw.} \\ W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_2 \lambda_1}^{(ik)} \end{array} \right\} \text{ mit beliebigem } \lambda_1 \text{ und } \lambda_2 \quad (\text{B-66})$$

kombiniert sind. Damit verschwinden nach (B-54) mit (B-40b) in Hochenergienäherung die folgenden R-Funktionen:

$$\begin{aligned} R(1,1; 0,0) &= 0, \\ R(1,1; 1,0) &= 0, \\ R(0,0; 1,1) &= 0, \\ R(1,0; 1,1) &= 0, \\ R(1,1; 1,1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B-67})$$

B.4.3. Paarvernichtung zweier Spin-1/2-Teilchen (mit Austauschdiagrammen)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei Teilchen 1 ein Positron und Teilchen 2 ein Elektron. Wie in Abschnitt B.4.2. ist der Endzustand beliebig. Für alle Elektron-Positron-Ströme wird Hochenergienäherung verwendet. In Abb. B - 5 ist die störungstheoretische Zerlegung der Helizitätsamplitude in Teilamplituden graphisch veranschaulicht.

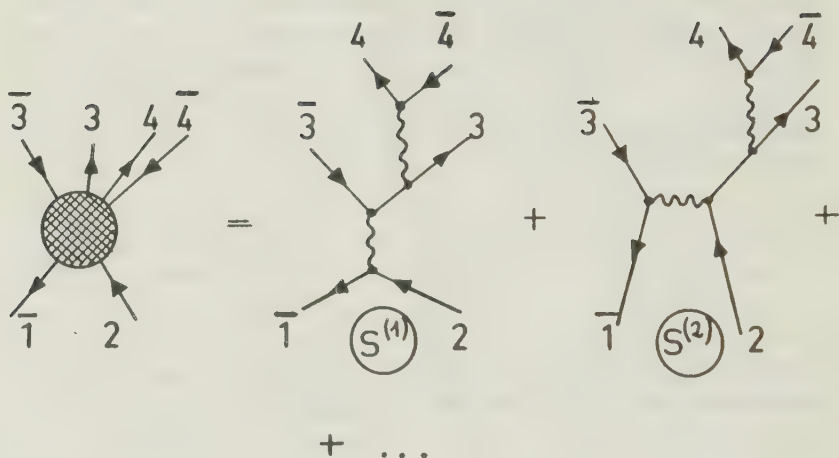


Abb. B - 5 : Störungstheoretische Zerlegung der Helizitätsamplitude für die Elektron-Positron-Paarvernichtung in Teilamplituden.

Der Wirkungsquerschnitt besteht aus einer Summe über die verschiedenen Produkte der Diagramme in Abb. B-5. Greift man sich das Produkt der Amplitude i mit der Amplitude k heraus, so entsteht der Summand

$$W_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'}^{(ik)} = \sum_{\lambda_3 \lambda_{\bar{3}} \lambda_4 \lambda_{\bar{4}} \dots} \langle \lambda_3 \lambda_{\bar{3}} \lambda_4 \lambda_{\bar{4}} \dots | S^{(i)} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \times \langle \lambda_3 \lambda_{\bar{3}} \lambda_4 \lambda_{\bar{4}} \dots | S^{(k)} | \lambda_1' \lambda_2' \rangle^* . \quad (B-68)$$

Man verfährt nun analog zu dem in Abschnitt B.4.2. behandelten Streufall und führt wiederum eine Fallunterscheidung durch. Im ersten Fall ist in Diagramm i Teilchen 1 mit Teilchen 2 über eine Fermionlinie verbunden (siehe z.B. die Amplitude $i=1$ in Abb. B-5). Man kann sich leicht davon überzeugen, daß in Hochenergienäherung (B-68) nur von Null verschieden sein kann, wenn mit $\lambda_1 = -\lambda_2$ auch

$\lambda_1' = -\lambda_2'$ ist. Im zweiten Fall besteht weder in Diagramm i noch in Diagramm k eine Verbindung von Teilchen 1 und Teilchen 2 über eine Fermionlinie, d.h. in beiden Teilamplituden gehen die Ströme der einlaufenden Fermionen durch das Diagramm hindurch. Hierfür erhält man die Auswahlregeln $\lambda_1' = \lambda_1$ und $\lambda_2' = \lambda_2$. In Hochenergienäherung können also nur Produkte von Helizitätsamplituden ungleich Null sein, deren Helizitätsindizes auf eine der beiden folgenden Arten kombiniert sind:

$$\left. \begin{array}{l} W_{\lambda_2, -\lambda_2; \lambda_2', -\lambda_2'}^{(ik)} \text{ bzw.} \\ W_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2}^{(ik)} \end{array} \right\} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \text{ und } \lambda_2' \text{ beliebig.} \quad (\text{B-69})$$

Mit (B-54) (unter Beachtung von (B-40b)) und (B-69) zeigt man, daß bei der Paarvernichtung zweier Spin-1/2-Teilchen dieselben R-Funktionen wie im Fall der Streuung zweier identischer Teilchen Null werden. Gl. (B-67) bleibt auch bei der Paarvernichtung von Spin-1/2-Teilchen richtig.

Anmerkung: Hikasa [87] zeigt das Verschwinden der Funktion $R(1,1; 1,1)$ für Elektron-Positron-Streuprozesse mit Hilfe der Spurmethode zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten. Die Voraussetzungen für das Verschwinden sind: keine Ankopplung skalarer Teilchen an die Elektronenströme; Vernachlässigbarkeit der Elektronenmasse. Die Ableitung erfolgt unter der Bedingung, daß die transversalen Polarisationsvektoren der beiden Einschußteilchen um 180° gegeneinander verdreht sind (natürliche Strahlpolarisation in Speicherringen).

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] T. Anders, W. Jachmann, H. Salecker, K. Wadan, in: Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy, and Theoretical Biology: Essays in Honor of Wolfgang Yourgrau, edited by A. van der Merwe (Plenum Press, New York, 1983), p.411. (Diese Arbeit lag vor auf dem "1981 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies", Bonn, August 1981.)
- [2] K. Wadan, Dissertation, München, 1983.
- [3] H. Salecker, in Vorbereitung.
- [4] R.F. Schwitters, Nucl. Instrum. & Meth., **118** (1974) 331.
- [5a] J.K. Bienlein, in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Proceedings of the 1980 International Symposium, Lausanne, C. Joseph, J. Soffer, editors (Birkhäuser, Basel, 1980), p.60.
- [5b] D. Sivers, in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, op. cit., p.82.
- [6] C.Y. Prescott, in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, op. cit., p.34.
- [7] C.Y. Prescott, Summary Talk presented at the 5th International Symposium on High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Upton, New York, September 15 - 21, 1982, SLAC preprint.
- [8] N.S. Craigie, K. Hidaka, M. Jacob, F.M. Renard, Phys.Rep. **99** (1983) 69.
- [9] N.S. Craigie, K. Hidaka, R. Ratcliffe, Phys. Lett. **129B** (1983) 310.
- [10] R. Rückl, Nucl. Phys. **B234** (1984) 91.
- [11] C.Y. Prescott et al., Phys. Lett. **77B** (1978) 347; C.Y. Prescott et al., Phys. Lett. **84B** (1979) 524.

- [12] V.W. Hughes, in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Proceedings of the Argonne Symposium, 1978, edited by G.H. Thomas (AIP, New York, 1979), p.171.
- [13] G. Baum et al., Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1135.
- [14] B. Richter, SLAC-Pub-3004, October 1982.
- [15] E. Dreisigacker, Phys.Bl. **40** (1984) 153.
- [16] T. Anders, W. Jachmann, J. Math. Phys. **24** (1983) 2847.
- [17] M. Jonker et al., in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Proceedings of the 1980 International Symposium, Lausanne, C. Joseph, J. Soffer, editors (Birkhäuser, Basel, 1980), p.375.
- [18] H.J. Behrend et al. (CELLO-Collaboration), DESY 83-019, März 1983.
- [19] J. Kessler, Polarized Electrons (Springer, Berlin, 1976).
- [20] J.G. Learned, L.K. Resvanis, C.M. Spencer, Phys. Rev. Lett. **35** (1976) 1688.
- [21] D.B. Gustavson et al., Nucl. Instrum. & Meth. **165** (1979) 177.
- [22] M. Jacob, G.C. Wick, Ann. Phys. **7** (1959) 404.
- [23] Yu.V. Novozhilov, Introduction to Elementary Particle Theory (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [24] P.A. Carruthers, Spin and Isospin in Particle Physics (Gordon and Breach, New York, 1971).
- [25] F.M. Renard, Basics of Electron Positron Collisions (Editions Frontieres, Gif sur Yvette, 1981).
- [26] H. Olsen, L.C. Maximon, Phys. Rev. **114** (1959) 887.
- [27] E. Fill, Umschau **13** (1983) 400.
- [28] I. Ginzburg et al., Nucl. Instrum. & Meth. **205** (1983) 47.
- [29] R. Hagedorn, Relativistic Kinematics (Benjamin, New York, 1963).

- [30] M. Jacob, CERN-TH. 4427/86, April 1986.
- [31] P.S. Cooper et al., Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1589.
- [32] M. Borghini, in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Proceedings of the Argonne Symposium, 1978, edited by G.H. Thomas (AIP, New York, 1979), p.567.
- [33] s. z.B. A. Abragam, in: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Proceedings of the Argonne Symposium, 1978, edited by G.H. Thomas (AIP, New York, 1979), p.1;
R.C. Fernow, op. cit., p.15;
T.O. Niinikoski, op. cit., p.62.
- [34] T. Anders, A.O. Barut, W. Jachmann, in Vorbereitung.
- [35] H.A. Olsen, Applications of Quantum Electrodynamics, in: Springer Tracts in Modern Physics, Vol.44 (Springer, Berlin, 1968), p.83.
- [36] H.K. Tseng, R.H. Pratt, Phys. Rev. **A7** (1973) 1502.
- [37] G.G. Ohlsen, Rep. Prog. Phys. **35** (1972) 717.
- [38] V.N. Baier, V.S. Fadin, Sov. Phys. Doklady **10** (1965) 204.
- [39] V.N. Baier, Sov. Phys. Uspekhi **14** (1972) 695.
- [40] A.A. Tkachenko, Sov. Phys. JETP **17** (1963) 1123.
- [41] B.H. Wiik, G. Wolf, Electron-Positron Interactions, Springer Tracts in Modern Physics, Vol.86 (Springer, Berlin, 1979).
- [42] A. Quenzer et al., Phys. Lett. **76B** (1978) 512.
- [43] S.R. Amendolia et al., Phys. Lett. **138B** (1984) 454.
- [44] W. Bauer, Computer-Programm zur analytischen Berechnung von Helizitätsamplituden, 1984, unveröffentlicht. Auf der Basis des Helizitätsformalismus von Anders und Jachmann [16] lassen sich Helizitätsamplituden mit 1 oder 2 Fermionenströmen berechnen. Die analytische Auswertung erfolgt mit Hilfe von SCHOONSCHIP, einem Computer-Programm von M. Veltman

zur Umformung von algebraischen Ausdrücken. Eine Beschreibung von SCHOONSCHIP findet man in den beiden Artikeln von H. Strubbe in *Computer Phys. Communications* **8** (1974) 1 und **18** (1979) 1.

- [45] M. Kobayashi, *Fortschritte d. Physik* **27** (1979) 463.
- [46] F.E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons* (Academic Press, London, 1979).
- [47] A.J.G. Hey, J.E. Mandula, *Phys. Rev.* **D5** (1972) 2610.
- [48] G. Wolf, P. Söding, in: *Electromagnetic Interactions of Hadrons*, Vol.2, A. Donnachie, G. Shaw, editors (Plenum Press, New York, 1978), p.1.
- [49] H.L. Anderson et al., *Phys. Rev.* **D20** (1979) 2645.
- [50] L.F. Abbott, W.B. Atwood, R.M. Barnett, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 582.
- [51] J.J. Aubert et al. (European Muon Collaboration), *Phys. Lett.* **105B** (1981) 315.
- [52] J.J. Aubert et al. (European Muon Collaboration), *Phys. Lett.* **114B** (1982) 291.
- [53] J.J. Aubert et al. (European Muon Collaboration), *Phys. Lett.* **121B** (1983) 87.
- [54] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126** (1977) 298.
- [55] V.W. Hughes, in: *High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets*, Proceedings of the 1980 International Symposium, Lausanne, C. Joseph, J. Soffer, editors (Birkhäuser, Basel, 1980), p.331.
- [56] M.J. Alguard et al., *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 70.
- [57] G. Baum et al., *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 2000.
- [58] V.W. Hughes, in: *Proc. of the 6th International Symposium on Polarization Phenomena in Nuclear Physics*, Osaka, 26 - 30 August, 1985, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986) Suppl. p. 327.

- [58a] Y.S. Tsai, *Rev. Mod. Phys.* **46** (1974) 815.
- [59] J.R. Johnson et al., in: *High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets*, Proceedings of the Argonne Symposium, 1978, edited by G.H. Thomas (AIP, New York, 1979), p.110.
- [60] H.D. Bremer et al., in: *High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets*, Proceedings of the 1980 International Symposium, Lausanne, C. Joseph, J. Soffer, editors (Birkhäuser, Basel, 1980), p.469.
- [61] R. Rossmanith et al., in: *High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets*, Proceedings of the Argonne Symposium, 1978, edited by G.H. Thomas (AIP, New York, 1979), p.115.
- [62] F.W. Lipps, H.A. Tolhoek, *Physica* **XX** (1954) 395.
- [63] F.R. Arutyunyan, V.A. Tumanyan, *Sov. Phys. JETP* **17** (1963) 1412.
- [64] F.R. Arutyunyan, V.A. Tumanyan, *Sov. Phys. Uspekhi* **7** (1964) 339;
F.R. Arutyunyan, I.I. Gol'dman, V.A. Tumanyan, *Sov. Phys. JETP* **18** (1964) 218 (Fehlerkorrektur in: I.I. Gol'dman, V.A. Khoze, *Sov. Phys. JETP* **30** (1970) 501).
- [65] G.J. Linford et al., *Appl. Optics* **21** (1982) 3633.
- [66] G.J. Linford et al., *Appl. Optics* **22** (1983) 1957.
- [67] J.F. Holzrichter, *Nature* **316** (1985) 309.
- [68] J.L. Emmett, W.F. Krupke, J.I. Davis, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-20** (1984) 591.
- [69] G. Brederlow, E. Fill, K.J. Witte, *The High-Power Iodine Laser* (Springer, Berlin, 1983).
- [70] R.L. McCrory, J.M. Soures, *Nucl. Fusion* **25** (1985) 1367.
- [71] J.L. Emmett, W.F. Krupke, J.B. Trenholme, *Sov. J. Quantum Electron.* **13** (1983) 1.

- [72] V.S. Letokhov, N.D. Ustinov, Power Lasers And Their Applications (Harwood Academic Publishers, New York, 1983).
- [73] D.C. Cartwright, Nucl. Fusion **25** (1985) 1355.
- [74] C. Yamanaka, Nucl. Fusion **25** (1985) 1343.
- [75] E. Storm, Nucl. Fusion **25** (1985) 1361.
- [76] G.S. Abrams et al., Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 477 (Beschreibung des Mark-II-Detektors).
- [77] SLD Design Report, SLAC-Report-273, May 1984.
- [78] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Klassische Feldtheorie (Akademie-Verlag, Berlin, 1977).
- [79] H.M. Pilkuhn, Relativistic Particle Physics (Springer, Berlin, 1979).
- [80] G. Goggi, in: Proceedings of the LEP Summer Study, September 1978, CERN-Report 79-01, p.483.
- [81] CERN Courier, March 1980, p.5.
- [82] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik (BI, Mannheim, 1966).
- [83] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie (BI, Mannheim, 1967).
- [84] A.D. Martin, T.D. Spearman, Elementary Particle Theory (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [85] M.E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum (J. Wiley, New York, 1957).
- [86] A. Lindner, Drehimpulse in der Quantenmechanik (Teubner, Stuttgart, 1984).
- [87] K. Hikasa, Phys. Lett. **143B** (1984) 266.

Herrn Prof. Dr. H. Salecker danke ich herzlich für die Themenstellung, für motivierende Diskussionen und wertvolle Hinweise. Sein andauerndes Interesse und die sehr guten Arbeitsbedingungen an seinem Lehrstuhl haben die Arbeit maßgeblich gefördert.

Herrn Dr. T. Anders danke ich für zahlreiche fruchtbare und richtungsweisende Diskussionen und für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Herrn Dipl.-Phys. C. Simm, Dr. W. Jachmann und Dr. T. Anders danke ich für klärende Bemerkungen und Rechenkontrollen im Zusammenhang mit der analytischen Berechnung von Helizitätsamplituden.

Lebenslauf

Wolfgang Bauer, geb. 21.03.1953 in Illertissen

Eltern: Karl Bauer,
Edith Bauer, geb. Kunz

1959 – 1963 Volksschule Illertissen

1963 – 1972 mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium Illertissen

23.06.1972 Abitur

1972 – 1973 Zivildienst

1973 – 1975 Physik-Studium an der Universität Ulm

8.10.1975 Diplom-Vorprüfung in Physik

1975 – 1981 Physik-Studium an der Ludwig-Maximilians-Universität München; Diplomarbeit bei Prof. Dr. H. Salecker zum Thema "Prüfung der Quantenelektrodynamik und Higgs-Boson-Effekte in myonischen Atomen"

18.08.1981 Diplom-Hauptprüfung für Studierende der Physik

Seit 1.11.1981 Angestellter im wissenschaftlichen Dienst bei der Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München.

